Conceptos previos de matemáticas

M. Meléndez

Marzo 2015

Estas notas recogen nociones básicas de matemáticas que se presupone que el estudiante de un curso introductorio de física conoce bien. Por ello, se pueden utilizar para repasar brevemente los conceptos clave o para consultar algún apartado concreto. Aunque no forman parte del contenido del curso, es imprescindible dominar estas técnicas para entender correctamente los argumentos empleados en cada tema y resolver los problemas propuestos.

1. Trigonometría

Utilizaremos la trigonometría principalmente para calcular las componentes de vectores, para hallar el ángulo que forma un vector con alguna dirección y para describir los movimientos circulares, así que nos centraremos en los conceptos relevantes para estas tareas.

1.1. Los teoremas de Tales y Pitágoras

Tomaremos como punto de partida dos teoremas sencillos y bien conocidos. El teorema atribuido a Tales se refiere a las relaciones entre segmentos formados cuando una serie de líneas paralelas cortan a otras dos rectas. Se puede deducir de la propiedad de *semejanza* de triángulos. Dos triángulos son semejantes cuando sus lados guardan las mismas proporciones. Por ejemplo, si el lado más largo de un triángulo fuera, digamos, el doble de largo que el más corto, entonces un segundo triángulo semejante a éste tendría la misma propiedad, aunque sus lados tuvieran longitudes diferentes que las del primer triángulo. Los triángulos semejantes tienen ángulos iguales.

En la figura 1, las líneas discontinuas son paralelas entre sí. Al cortar a las continuas forman tres triángulos semejantes: OAD, OBE y OCF. Es

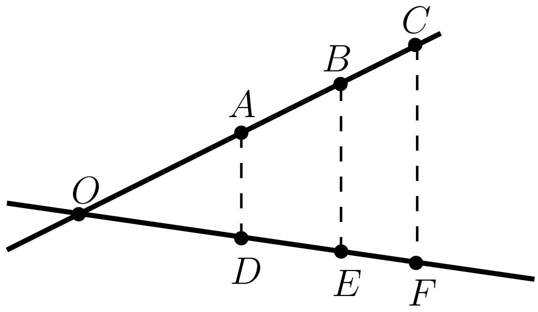

Figura 1: El teorema de Tales. Los segmentos OD y AD guardan la misma proporción que los segmentos OB y BE, y los segmentos OC y CF.

decir, aunque tienen lados de longitudes diferentes, los tres triángulos tienen ángulos iguales. Por ejemplo, aunque OA en el primer triángulo es más corto que OB en el segundo y OC en el tercero, los ángulos en A, B y C son idénticos. Por lo tanto, el segmento OA guarda la misma proporción con AD que los segmentos OB y BE, y los segmentos OC y CF.

$$\frac{OA}{AD} = \frac{OB}{BE} = \frac{OC}{CF}.$$

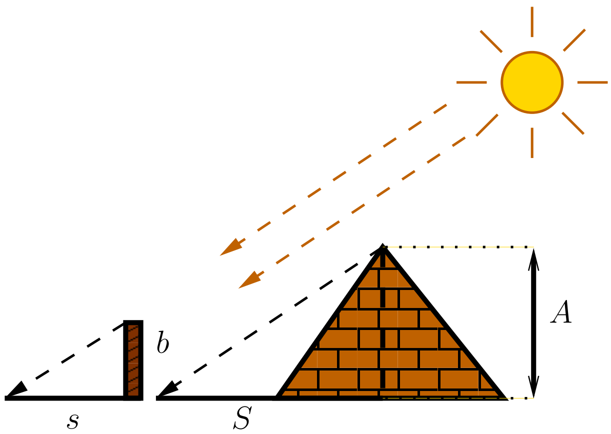

Figura 2: La altura de la Gran pirámide (A) y la extensión de su sombra (S) guardan la misma proporción que la altura del bastón (b) y su sombra (s).

Se cuenta que Tales utilizó este hecho para determinar la altura de la Gran pirámide de Guiza observando la sombra proyectada por un bastón.

Efectivamente, la altura de la pirámide y su sombra formaban dos lados de un triángulo, semejante al que formaba el bastón con su sombra (figura 2). Como

$$\frac{b}{s} = \frac{A}{S},$$

dedujo la altura de la pirámide, $A = b\,\frac{S}{s}$, a partir de la longitud del bastón, b, y las de las sombras, s y S.

El segundo teorema, atribuido a Pitágoras, es probablemente el teorema matemático más famoso. Relaciona las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, afirmando que el cuadrado de la *hipotenusa* (el lado de mayor longitud) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, llamados *catetos* (figura 3).

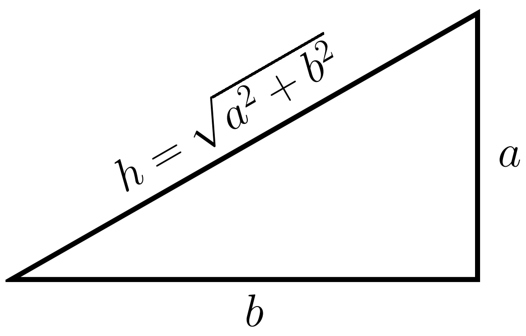

Figura 3: El teorema de Pitágoras. Si sumamos los cuadrados de los catetos a y b, obtenemos el cuadrado de la hipotenusa h.

1.2. Las funciones trigonométricas seno y coseno

Para definir las funciones trigonométricas utilizamos una circunferencia de radio $R = 1$. Un ángulo cualquiera θ, medido con un arco que parte del eje horizontal, determina una proyección sobre el eje vertical y otra sobre el eje horizontal denominadas, respectivamente, seno y coseno del ángulo θ (representados en la figura 4 como $\sin\theta$ y $\cos\theta$).

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rojo de la figura vemos que, al ser la hipotenusa igual al radio de la circunferencia,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = R^2 = 1,$$

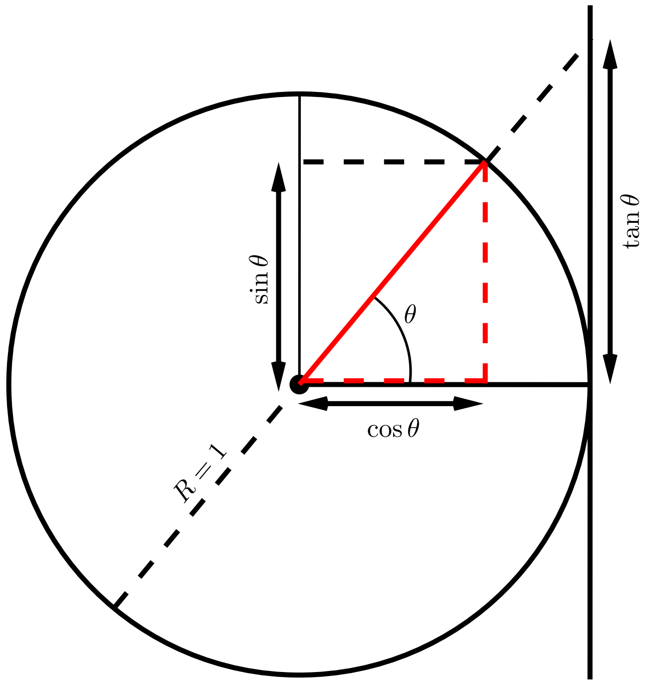

Figura 4: La circunferencia trigonométrica y las magnitudes del seno, coseno y tangente del ángulo θ dibujado.

donde $\sin^2\theta$ y $\cos^2\theta$ representan $(\sin\theta)^2$ y $(\cos\theta)^2$.

Dado un segmento cualquiera de longitud L y el ángulo θ que forma con la dirección horizontal, podemos calcular sus proyecciones sobre los ejes coordenados fácilmente por el teorema de Tales (ver figura 5). Si comparamos las proyecciones del segmento con su longitud, vemos que deben guardar la misma proporción que en la circunferencia de radio $R = 1$. En otras palabras, si x es la magnitud de la proyección horizontal, entonces

$$\frac{x}{L} = \frac{\cos\theta}{R} = \cos\theta,$$

de donde concluimos que $x = L\ \cos\theta$. Un razonamiento parecido nos permite decir que la proyección vertical mide $L\sin\theta$.

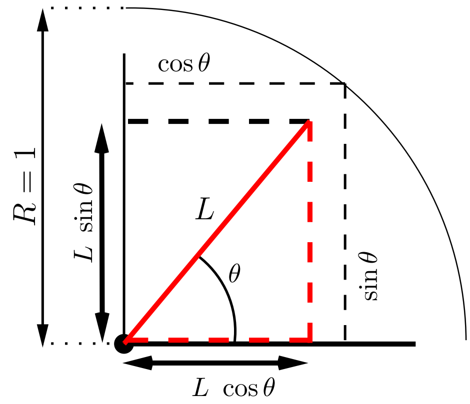

Figura 5: La proyección vertical del segmento de longitud L mide $L\ \sin\theta$, y su proyección horizontal, $L\ \cos\theta$.

1.3. La función tangente y la pendiente

La figura 4 también representa la tangente del ángulo θ ($\tan\theta$). Por el teorema de Tales, vemos que

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta}{R} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

La tangente se puede interpretar como la *pendiente* definida por el ángulo θ. Esta magnitud expresa cuánto asciende una recta que forma un ángulo θ con la dirección horizontal por cada unidad que avanzamos hacia la derecha. La dirección horizontal tiene pendiente nula (al avanzar un paso hacia la derecha, no ascendemos en absoluto). Cuando $\theta = 60°$ (o $\theta = \frac{\pi}{3}$ radianes) ascendemos $\sqrt{3}$ unidades por cada una que avanzamos, por lo que la pendiente es $\tan 60° = \sqrt{3}$.

La figura 6 presenta las pendientes de diversas rectas y los rangos de valores para las pendientes que no se han dibujado. Por ejemplo, $\theta = 60°$ corresponde a una recta con pendiente mayor que 1 y menor que infinito al estar comprendido entre las rectas a 45° y 90°.

En física, las pendientes de funciones se interpretan como tasas de variación. En este caso, diríamos que la pendiente representa la tasa de variación de la altura por unidad de variación en la dirección horizontal. Sin embargo, si en el eje horizontal hubiéramos representado el tiempo y en el vertical la posición, la pendiente nos indicaría cuánto varía la posición con respecto al tiempo, es decir, nos daría la velocidad.

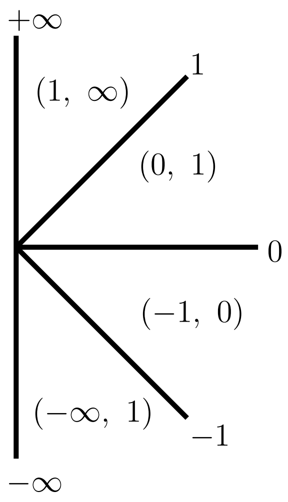

Figura 6: Valores de la pendiente para diferentes rectas. Los intervalos indican el rango de valores para pendientes comprendidas entre las de dos rectas representadas.

1.4. Grados y radianes

Para medir los ángulos, convencionalmente se divide el círculo en 360 sectores iguales, cada uno de los cuales corresponde a una abertura de un grado. Así, el ángulo recto corresponde a 90°. Sin embargo, en física resulta a menudo más conveniente representar los ángulos en radianes, especialmente cuando nos ocupamos del movimiento circular.

Imaginemos un hilo de la misma longitud que el radio de un círculo. Si extendemos el hilo siguiendo el borde del círculo, cubrirá un arco de circunferencia de un radián. Un radián se define entonces como el ángulo correspondiente a un arco de circunferencia de la misma longitud que el radio. Como el radio de la circunferencia cabe exactamente 2π veces en la circunferencia, dividimos una vuelta completa en 2π radianes. En consecuencia, $180° = \pi$ radianes y $90° = \frac{\pi}{2}$ radianes.

Si en un movimiento circular conocemos el ángulo recorrido, ϕ, a lo largo de una circunferencia de radio R, y conocemos el valor de ϕ en radianes, entonces la distancia recorrida no es más que $R\phi$, y esta es la razón principal por la que suele resultar más cómodo medir los ángulos en radianes.

1.5. Las funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas seno y coseno nos dan la magnitud de las proyecciones vertical y horizontal de un segmento de longitud unidad dado el ángulo θ que forman con el eje horizontal, y la tangente nos da la pendiente del segmento, pero podríamos estar interesados en calcular el ángulo a partir de las proyecciones o de la pendiente. Para ello, utilizamos las funciones trigonométricas inversas arcsin (arco seno), arc cos (arco coseno) y arctan (arco tangente). Por ejemplo, como $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, entonces $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, es decir, el arco seno de $\frac{1}{2}$ es igual a un ángulo cuyo seno es igual a $\frac{1}{2}$.

En física, en muchas ocasiones conocemos el valor de las dos proyecciones (o componentes) de un vector, y queremos calcular el ángulo que forma con la dirección horizontal. En estos casos lo más cómodo es calcular el ángulo como el arco tangente de la pendiente. Si y representa la proyección vertical, y x la horizontal, entonces el ángulo es

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

2. Vectores

En física, utilizamos vectores para describir la posición, la velocidad, la aceleración y las fuerzas, entre muchas otras cosas. Un vector se define como una magnitud orientada con una dirección y sentido. Puede representarse gráficamente con una flecha orientada adecuadamente y cuya longitud corresponde a la magnitud.

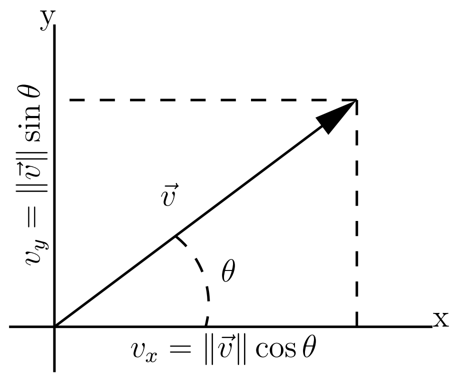

Figura 7: Vector $\vec{v}$ y sus componentes v_x y v_y.

Normalmente, en los cálculos con vectores operamos directamente con sus *componentes* (sus proyecciones sobre los ejes coordenados). Los vectores normalmente se escriben en negrita o con una flecha encima: **v** o $\vec{v}$. Supongamos que las componentes horizontal y vertical del vector $\vec{v}$ fueran v_x y v_y. Entonces tenemos varias formas de expresar $\vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x,\ v_y)\\ &= v_x\ \hat{\mathbf{x}} + v_y\ \hat{\mathbf{y}}\\ &= v_x\ \hat{\imath} + v_y\ \hat{\jmath}.\end{aligned}$$

Usamos $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ (o $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$) para representar vectores de longitud uno en la dirección de los ejes horizontal y vertical.

El *módulo* del vector $\vec{v}$ se expresa como $|\vec{v}|$, $\|\vec{v}\|$ o simplemente v (sin negrita), y representa la longitud o magnitud de un vector. Según el teorema de Pitágoras,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Podemos calcular el ángulo con la horizontal a partir de la pendiente, como hemos visto,

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}.$$

Para vectores en tres dimensiones, añadimos una componente adicional, v_z.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x,\ v_y,\ v_z)\\ &= v_x\ \hat{\mathbf{x}} + v_y\ \hat{\mathbf{y}} + v_z\ \hat{\mathbf{z}}\\ &= v_x\ \hat{\imath} + v_y\ \hat{\jmath} + v_z\ \hat{k}.\end{aligned}$$

Como antes, los signos $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ (o $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$) representan vectores de módulo uno en las direcciones de los ejes coordenados ($\|\hat{\imath}\| = \|\hat{\jmath}\| = \|\hat{k}\| = 1$).

2.1. Suma y producto por un número

Para multiplicar un vector por un número simplemente multiplicamos las componentes por el número.

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\ \hat{\imath} - 3\ \hat{\jmath},\\ 5\ \vec{w} &= 20\ \hat{\imath} - 15\ \hat{\jmath}.\end{aligned}$$

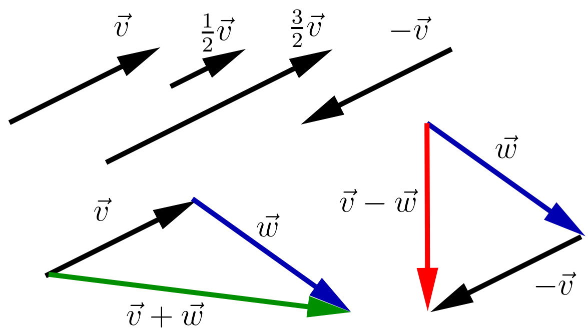

Figura 8: Representación gráfica de las operaciones de producto de un vector por un número, y suma y resta de vectores.

Gráficamente, al multiplicar un vector por un número cambiamos su longitud, invirtiendo el sentido si el número es negativo (ver figura 8).

La suma de vectores se realiza componente a componente.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 4\ \hat{\imath} + 2\ \hat{\jmath},\\ \vec{w} &= 4\ \hat{\imath} - 3\ \hat{\jmath},\\ \vec{v}+\vec{w} &= 8\ \hat{\imath} - \hat{\jmath}.\end{aligned}$$

Cuando representamos gráficamente la suma, comprobamos que es el resultado de poner un vector a continuación del otro y unir los extremos (ver figura 8). La resta de dos vectores se puede entender en términos de la suma. Por ejemplo, $\vec{w}-\vec{v} = \vec{w} + (-1)\ \vec{v}$:

$$\vec{w}-\vec{v} = -5\ \hat{\jmath}.$$

2.2. Producto escalar

El *producto escalar estándar* entre dos vectores es igual a la suma de los productos de sus componentes en cada eje. Para los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que vimos antes,

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= v_x\ w_x + v_y\ w_y\\ &= 4\cdot 4 + 2\cdot(-3) = 10.\end{aligned}$$

Sustituyendo las componentes por sus expresiones en términos de módulos y ángulos (siendo θ y ϕ los ángulos que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con la horizontal, respectivamente),

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{w} &= \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta\ \cos\phi + \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin\theta\ \sin\phi \\ &= \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\theta-\phi).\end{aligned}$$

En el último paso, hemos utilizado la identidad trigonométrica $\cos\theta\ \cos\phi + \sin\theta\ \sin\phi = \cos(\theta-\phi)$ (que no hemos demostrado aquí). Esto quiere decir que el producto escalar de $\vec{v}$ por $\vec{w}$ es igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman, lo cual implica que el producto escalar es nulo cuando forman ángulo recto.

En física se utiliza el producto escalar sobre todo con un vector de módulo uno. Si multiplicamos $\vec{v}$ por un vector $\hat{n}$ ($\|\hat{n}\| = 1$), obtenemos la magnitud de la proyección de $\vec{v}$ sobre la dirección de $\hat{n}$.

$$\vec{v}\cdot\hat{n} = \|\vec{v}\|\cos\alpha,$$

siendo α el ángulo entre $\vec{v}$ y $\hat{n}$.

2.3. Producto vectorial

En el cálculo de momentos angulares y las fuerzas sobre cargas en movimiento debidos a campos magnéticos se utiliza otro producto entre vectores, conocido como *vectorial*. En función de las componentes de dos vectores tridimensionales el producto vectorial se determina con la siguiente regla:

$$\vec{v}\times\vec{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\ \hat{\imath} + (v_z w_x - v_x w_z)\ \hat{\jmath} + (v_x w_y - v_y w_x)\ \hat{k}.$$

La dirección de $\vec{v}\times\vec{w}$ resulta ser perpendicular al plano que contiene a $\vec{v}$ y $\vec{w}$. El sentido depende de la orientación relativa de los vectores ($\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$, pero $\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}$). El módulo de $\vec{v}\times\vec{w}$ es igual al producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman, lo cual quiere decir que el producto vectorial de vectores paralelos es nulo.

Para ordenar correctamente las componentes en el producto vectorial, se suele escribir el producto como si fuera un determinante,

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

3. Funciones, límites y derivadas

Las definiciones modernas de velocidad, aceleración y trabajo, entre otras, se enuncian en términos de los conceptos del cálculo infinitesimal. La velocidad y la aceleración se obtienen derivando ciertas funciones respecto del tiempo, y el trabajo se entiende como una integral. En este apartado, explicaremos brevemente estas nociones, comenzando con la de función.

3.1. Funciones

En el estudio de fenómenos físicos, nos encontramos con muchas magnitudes que varían en el espacio o el tiempo, por lo que no podemos representarlas con un único número. Por ejemplo, si queremos estudiar cómo evoluciona la temperatura de un objeto al enfriarse, necesitamos un número para cada tiempo.

Una función f hace corresponder a cada elemento x de un cierto conjunto (llamado *dominio*) un único valor (*imagen*) representado como $f(x)$. En el ejemplo de la temperatura, el dominio sería cierto intervalo temporal y las imágenes serían los valores de la temperatura en cada instante representados como $T(t)$. Podríamos tener un objeto inicialmente a 100°C en el tiempo $t = 0$ (es decir, $T(0) = 100$°C) que pasados 300 segundos se encontrara a 70°C ($T(300) = 70$°C).

Una función puede depender de varias variables. Si quisiéramos conocer cómo va cambiando la temperatura en distintos puntos de nuestro planeta, necesitaríamos una función $T(t,\ \phi,\ \theta)$ del tiempo t, la longitud ϕ y la latitud θ.

Además de las funciones con imágenes contenidas en el conjunto de números reales, utilizaremos funciones vectoriales en las que la imagen de un elemento del dominio es un vector. La posición $\vec{r}(t)$ de un objeto que se mueve en dos dimensiones pertenece a esta clase de funciones. Para cada tiempo, obtenemos un vector que señala la posición del objeto. Si tuviéramos, por poner un ejemplo, el siguiente vector de posición:

$$\vec{r}(t) = t\ \hat{\imath} + (18 + t - 5t^2)\ \hat{\jmath},$$

entonces podríamos calcular la posición para distintos instantes, como $t = 0$,

$t = 1$ o $t = 2$,

$$\vec{r}(0) = 18\ \hat{\jmath},$$
$$\vec{r}(1) = \hat{\imath} + 14\ \hat{\jmath},$$
$$\vec{r}(2) = 2\ \hat{\imath}.$$

Las funciones de una variable se representan gráficamente con curvas que recorren los puntos de coordenadas $(t,\ f(t))$. De este modo, a cada valor sobre el eje horizontal, le corresponde un valor del eje vertical. En la figura 9, vemos la gráfica de una función en la que se aprecia que $f(t_0) = L$.

3.2. Límites

Sólo utilizaremos el concepto de límite para definir la derivada de una función en un punto en el apartado siguiente, por lo que esta sección se puede omitir sin perder el hilo de la exposición, siempre que tengamos en mente la idea intuitiva de que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es el valor al que se "acerca" $f(x)$ a medida que x se aproxima más y más a x_0.

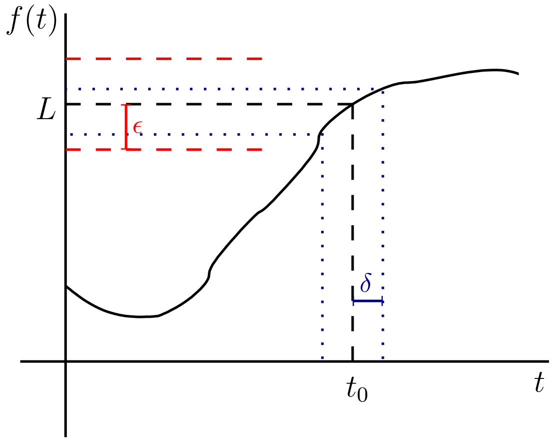

Figura 9: El límite $\lim_{t \to t_0} f(t)$ es igual a L si podemos encontrar un $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$ tal que $|f(t) - L| < \epsilon$.

La definición matemáticamente correcta del concepto de límite involucra una exposición considerablemente más abstracta. Supongamos que tenemos una función que no está definida en t_0, pero sospechamos que a medida que t se aproxima a este valor, $f(t)$ se aproxima indefinidamente al valor L. Si aceptamos un pequeño margen de error $\epsilon > 0$ alrededor de este valor, podrían convencernos de que la función tiende a L si nos mostraran un intervalo que incluya a t_0, llamémoslo $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$, en el que la función siempre devuelve valores entre $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$ excepto, quizás, cuando $t = t_0$ (figura 9). Decimos que el límite cuando t tiende a t_0 de $f(t)$ es L ($\lim_{t \to t_0} f(t) = L$) cuando siempre podemos encontrar el valor de δ, sea cual sea el margen ϵ.

Más concretamente, $\lim_{t \to t_0} f(t) = L$ significa que sea cual sea el intervalo $(L - \epsilon,\ L + \epsilon)$ que elijamos alrededor de L (con $\epsilon > 0$), siempre existirá un intervalo $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$ (con $\delta > 0$) tal que los valores de t (con $t \neq t_0$) contenidos en $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$ tienen su imagen $f(t)$ contenida en $(L - \epsilon,\ L + \epsilon)$.

3.3. Derivadas

La derivada de una función f respecto de la variable t, que escribimos como $\frac{df}{dt}$, representa la tasa de variación de f con respecto a t. En otras palabras, la derivada asigna a cada valor de la variable t la pendiente de la gráfica de $f(t)$ en $(t,\ f(t))$. Habitualmente, f no será una línea recta, por lo que no podremos calcular la pendiente dividiendo el incremento de f entre el correspondiente incremento de t. Sin embargo, si nos fijamos en la figura 10, nos damos cuenta de que la pendiente de la línea roja (definida como el incremento $f(t + \Delta t) - f(t)$ dividido entre el correspondiente incremento en t, Δt) se acerca más y más a la pendiente de la curva en t a medida que disminuye el valor de Δt. Como no podemos poner $\Delta t = 0$, al no estar definida la división entre cero, calculamos el limite de la división cuando Δt tiende a cero. La derivada se define, por tanto, como

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Tenemos, entonces, que si $f(t) = t^2$ la derivada de f resulta ser

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} 2t + \Delta t \\
&= 2t.
\end{aligned}$$

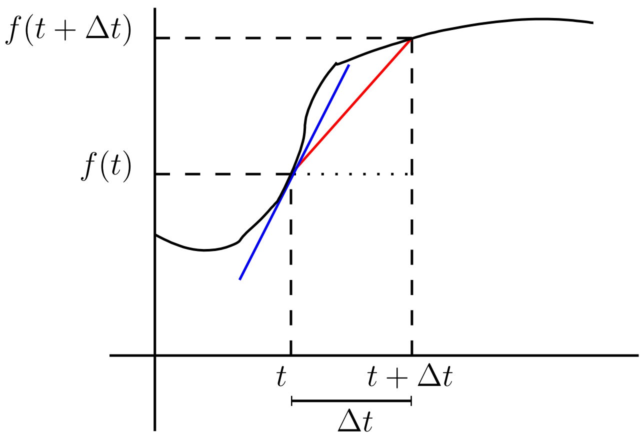

Figura 10: La pendiente de la línea roja se acerca indefinidamente a la pendiente de la recta tangente en $(t,\ f(t))$ a medida que disminuye Δt.

La derivada de una función constante, como $f(t) = 3$, es evidentemente nula. Esto se ve más claramente notando que la gráfica en este caso es una línea horizontal.

En los cursos introductorios de física, se suelen calcular las derivadas sobre todo de las potencias y las funciones seno y coseno. Por esta razón, conviene conocerlas de memoria. Si c y n representan constantes arbitrarias, entonces

$$\frac{d}{dt}(ct^n) = cnt^{n-1},$$
$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t,$$
$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t.$$

De la definición de derivada también se pueden deducir varios teoremas para la derivada de la suma, resta, producto y cociente de funciones. Si c

representa una constante y f y g representan funciones, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d(cf)}{dt} &= c\frac{df}{dt}, \\
\frac{d(f+g)}{dt} &= \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}, \\
\frac{d(f-g)}{dt} &= \frac{df}{dt} - \frac{dg}{dt}, \\
\frac{d(fg)}{dt} &= \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}}{g^2}.
\end{aligned}$$

Otro resultado importante, conocido como la *regla de la cadena*, nos dice cómo calcular la derivada de una composición de funciones.

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \frac{df(g)}{dg}\,\frac{dg}{dt}.$$

Por ejemplo, si queremos calcular la derivada de la función $f(t) = \cos(3t^2)$, obtenemos

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(3t^2)) = -\sin(3t^2)\ 6t.$$

En otras palabras, calculamos la derivada de la función coseno respecto de su argumento, y después multiplicamos por la derivada del argumento (la derivada de $3t^2$ es igual a $6t$).

La derivada de un vector se calcula componente a componente:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \frac{dv_x}{dt}\ \hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\ \hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\ \hat{k}.$$

4. Integrales y ecuaciones diferenciales

No entraremos en la definición matemática de integral. Para nuestros propósitos, basta con saber que al integrar realizamos, en cierto sentido, la operación inversa de la derivada, de modo que si

$$\frac{dF}{dt} = f(t),$$

entonces la integral de f respecto de t será

$$\int f(t)\ dt = F(t).$$

Se llama a la función F la *primitiva* de f. Dado que la derivada de una constante es nula, las funciones $F(t)$, $F(t)+3$, $F(t)-12$, etc. tienen todas la misma derivada. Esto implica que una función f tiene muchas primitivas posibles, que se diferencian entre sí en el valor de una constante (0, 3 y -12 en las primitivas que hemos mencionado).

De nuestra idea aproximada de integral y de los teoremas que hemos listado antes para las derivadas, podemos deducir algunas propiedades importantes de las integrales:

$$\int cf(t)\ dt = c\int f(t)\ dt,$$
$$\int (f(t)+g(t))\ dt = \int f(t)\ dt + \int g(t)\ dt,$$
$$\int (f(t)-g(t))\ dt = \int f(t)\ dt - \int g(t)\ dt.$$

En los problemas que nos ocuparán, nos encontraremos principalmente con las integrales siguientes (c y K representan constantes arbitrarias):

$$\int ct^n\ dt = \frac{c}{n+1}t^{n+1} + K,$$
$$\int \sin(ct)\ dt = -\frac{1}{c}\cos(ct) + K,$$
$$\int \cos(ct)\ dt = \frac{1}{c}\sin(ct) + K.$$

La *integral definida* de una función $f(x)$ en un intervalo $(a,\ b)$ es igual al área entre la gráfica de f y el eje horizontal en el intervalo $(a,\ b)$ (ver figura 11) y se calcula

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a),$$

siendo F una primitiva de f. Ilustraremos el concepto calculando el trabajo de una fuerza.

El trabajo de una fuerza se define en física como el producto de la fuerza en el sentido del desplazamiento por la distancia recorrida. El cálculo no es

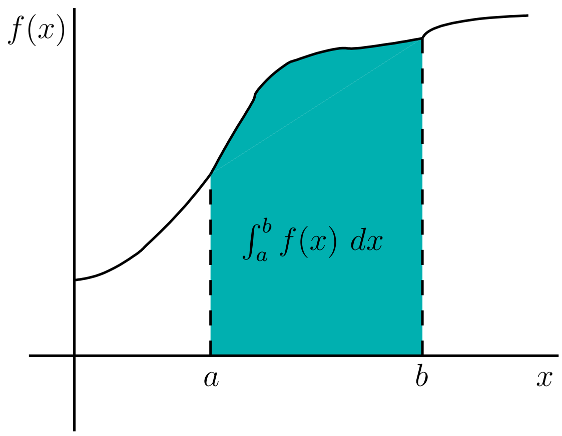

Figura 11: La integral definida de $f(x)$ entre a y b es igual al área de la zona marcada en azul.

más que una multiplicación cuando la fuerza es constante a lo largo de todo el recorrido. Se puede contemplar como el área de un rectángulo de base igual al desplazamiento y altura igual a la fuerza. Ahora bien, cuando la fuerza depende del punto del recorrido, tenemos una altura que cambia de un punto a otro, y hay que recurrir a la expresión integral.

Supongamos que queremos calcular el trabajo realizado por un muelle de constante k cuando se contrae desde $x = l$ hasta la posición de equilibrio ($x = 0$). Entonces, como la fuerza ejercida por el muelle es $F = -kx$, tenemos una fuerza que depende del punto x. El trabajo total desde $x = l$ hasta $x = 0$ será

$$\int_l^0 (-kx)\ dx = -(\frac{1}{2}k \cdot 0^2 - \frac{1}{2}kl^2) = \frac{1}{2}kl^2.$$

En los problemas típicos de dinámica, queremos calcular una expresión que describa el movimiento de un cuerpo. La segunda ley de Newton determina la variación de la cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$ (siendo m la masa y $\vec{v}$ la velocidad) con la fuerza neta sobre el cuerpo,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Normalmente conocemos el valor de la fuerza en función de la posición del cuerpo y tenemos una serie de datos adicionales (como las condiciones iniciales del movimiento). La velocidad no es más que la variación de la posición

$\vec{r}$ respecto del tiempo. Esto convierte la ecuación en

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}).$$

La expresión $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ representa la derivada de la derivada de la posición, que conocemos como *aceleración.* En términos matemáticos, llamamos a la expresión anterior *ecuación diferencial* porque queremos obtener la función $\vec{r}(t)$ a partir de esta relación de $\vec{r}$ con sus derivadas. Para ciertas expresiones sencillas de la fuerza, podemos resolver la ecuación diferencial integrando dos veces a ambos lados de la ecuación, y utilzando los datos del problema para determinar el valor de las constantes de integración.