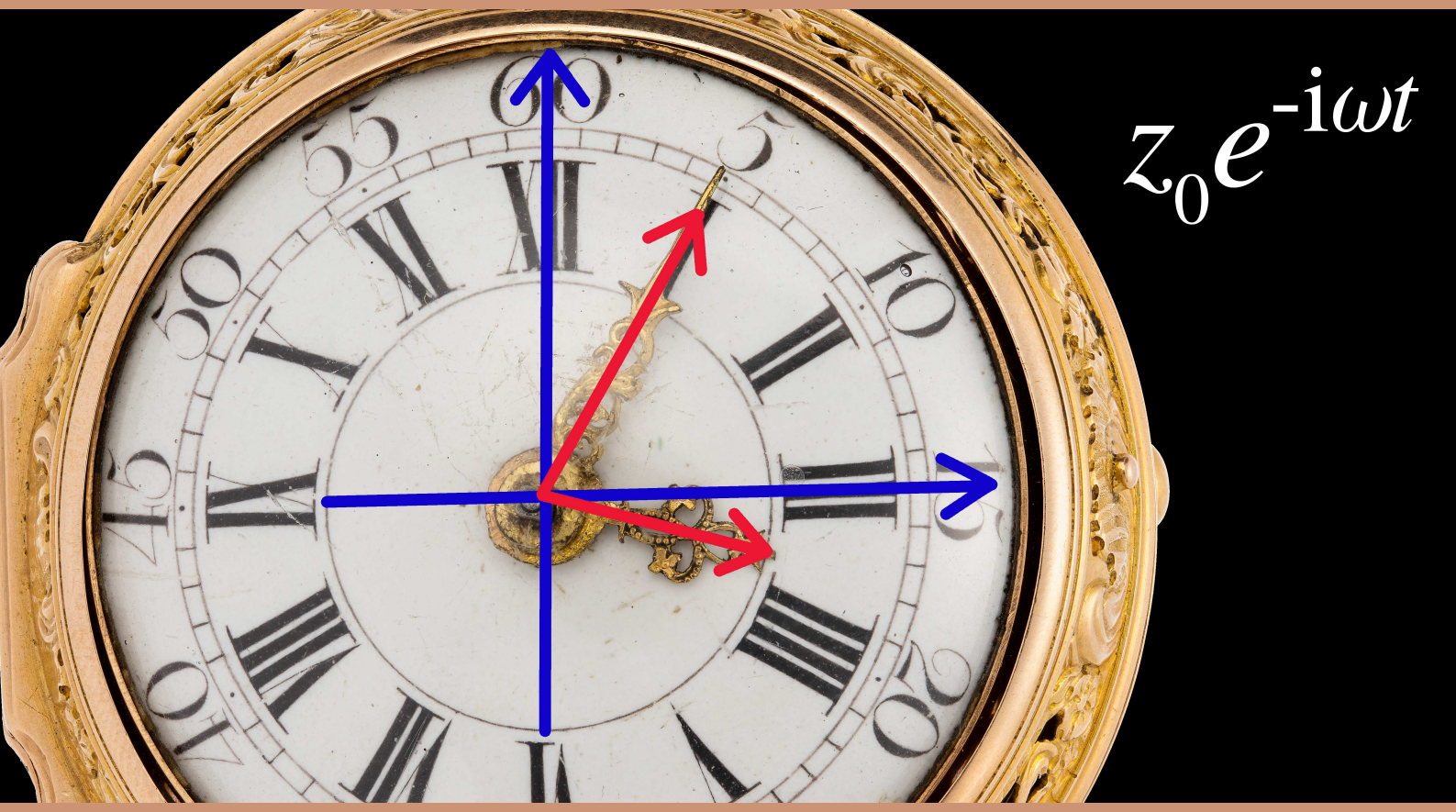
Fasores



Marc Meléndez Schofield

Fasores

Marc Meléndez Schofield

Título: Fasores
Autor: Marc Meléndez Schofield.

http://hekate.academy

Marc Meléndez Schofield (2020).

© 2020, *Texto y figuras*: Marc Meléndez Schofield. *Fasores* se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC-BY-NC-SA 4.0). Resumen y detalles legales en:
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

M. Meléndez Schofield / Hallwyl Museum / H. Bonnevier (2020).

© 2020, *Portada y contraportada*: Marc Meléndez Schofield / Hallwyl Museum / Helena Bonnevier. Las imágenes son una edición de fotografías de Helena Bonnevier en el museo Hallwyl. Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 International (CC-BY-SA 3.0). Resumen y detalles legales en:
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/

Índice general

Introducción **5**

Osciladores **7**
La idea básica . . . 7
Derivadas . . . 8
El oscilador armónico . . . 8
El oscilador amortiguado . . . 11
El oscilador forzado . . . 14

Ecuaciones diferenciales **20**
Coeficientes constantes . . . 20
Ecuación equidimensional de Euler-Cauchy . . . 22
Ecuación de ondas . . . 25
Ecuación del calor . . . 29

Vibraciones **33**
Circuitos RLC . . . 33
Cajas negras . . . 35
Pequeñas vibraciones . . . 37
Osciladores acoplados . . . 39
Modos normales . . . 43
Forzar y amortiguar . . . 46

Ondas **49**
Ondas de presión y de cizalla . . . 49
Ondas estacionarias y armónicos . . . 52
Capa límite de Stokes . . . 55
Ondas electromagnéticas . . . 57
La ecuación de Schrödinger . . . 59

Una brevísima introducción a las series de Fourier **60**
Expresar las condiciones iniciales como suma de fasores 60
Producto escalar 61
Espacios lineales de funciones 64
Series de Fourier 65
Ondas con disipación 69
Transformada de Fourier 72

Epílogo **76**

Respuestas a los ejercicios **80**
Osciladores 80
Ecuaciones diferenciales 94
Vibraciones 107
Ondas 120
Una brevísima introducción a las series de Fourier 129

Introducción

No me di cuenta de que estaba escribiendo un libro hasta que hube completado más o menos la mitad. Después de haber ayudado a mi amigo Juan Ballesteros a crear un curso de introducción a la variable compleja, uno de nuestros alumnos nos habló de la inesperada belleza que había encontrado en ella, pero añadió que "no servía para nada". Las páginas que siguen contienen parte de una respuesta a aquella conversación. Inicialmente, pensé en grabar unos tres o cuatro vídeos con ejemplos de aplicaciones de la variable compleja y acompañarlos de unos breves apuntes, pero empecé escribiendo sobre fasores y el texto fue creciendo hasta que se me escapó de las manos.

Los fasores extienden la sencilla fórmula de Euler,

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta),$$

para permitir que el argumento θ cambie con el tiempo. Por tanto, para leer este libro hace falta estar familiarizado con la aritmética de números complejos y las propiedades de la exponencial. Haremos derivadas sencillas y algunas integrales, por lo que conviene haber estudiado cálculo o análisis matemático.

A menudo partiremos de la segunda ley de Netwon, expresada comúnmente como fuerza igual a masa por aceleración. Como la aceleración se define como la segunda derivada de la posición x con el tiempo y la fuerza generalmente depende de la posición, escribiremos la ley así:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

Un problema típico de mecánica consiste en determinar cómo cambia la posición con el tiempo, dada a fuerza y unas condiciones iniciales. En términos matemáticos, queremos encontrar una función del tiempo $x(t)$ que satisfaga la ecuación anterior. Como la incógnita es una *función* (en lugar de un número) y la igualdad involucra expresiones con la función y sus derivadas, decimos que queremos resolver una *ecuación diferencial*. Aprenderemos a resolver algunas sencillas utilizando fasores. También nos encontraremos

ante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (es decir, que la función incógnita depende de más de una variable).

Empezando en el tercer capítulo, haremos uso de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y vectores, a un nivel que debería resultar accesible a lectores que hayan estudiado ya álgebra lineal, y que conozcan los conceptos de autovector y autovalor (llamados también vectores y valores propios). Si no te incomodan estos párrafos, adelante, este libro es para ti.

En el siglo XVIII, de Moivre, Euler y Fourier comenzaron a operar con números complejos como hacemos en estos capítulos. Imagino una escena con música de clave a la luz de un quinqué. Un matemático se quita una peluca de rizos blancos y se sienta ante los papeles de su escritorio con pluma y tintero. Medita sobre los movimientos cíclicos, péndulos, vibraciones y ondas, con la mirada vagando distraída por la habitación hasta posarse sobre la cara de su reloj de cuerda. Siente el leve latido mecánico y le parece percibir en su mente el giro coordinado de ruedas dentadas. De pronto, surge la idea, carga la pluma y se pone a escribir.

Osciladores

La idea básica

Los fasores son números complejos que rotan alrededor del origen con velocidad angular uniforme. Tienen muchísimas aplicaciones en matemáticas, física e ingeniería. Como veremos, se pueden utilizar para representar oscilaciones y facilitan la resolución de muchas ecuaciones diferenciales lineales. Se utilizan como herramienta de manera habitual en electromagnetismo, óptica, acústica, mecánica de vibraciones, teoría de circuitos y mecánica cuántica, entre otros campos.

Para convertir un número complejo cualquiera z en un fasor, no hay más que multiplicarlo por una fase compleja $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ dependiente del tiempo,

$$F(t) = ze^{-\mathrm{i}\omega t},$$

donde ω es la velocidad angular de giro del fasor, y el signo negativo corresponde al sentido horario de giro. Como z se puede escribir siempre en forma exponencial $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$, con $\theta = \arg(\theta)$, el fasor se puede escribir de manera equivalente como

$$F(t) = |z|e^{-\mathrm{i}(\omega t - \theta)},$$

y se llama al ángulo θ *desfase* (figura 1).

Ejercicio 1 [Respuesta: página 80] ¿Cuándo coinciden las agujas de los minutos y las horas en un reloj? ¿Cuándo coincide la aguja horaria con los segunderos? ¿Cada cuánto coinciden exactamente las tres agujas?

Derivadas

A estas alturas, ya sabemos que operar con números complejos en forma exponencial simplifica muchos cálculos como la multiplicación o las raíces. Los fasores son, además, fáciles de derivar respecto del tiempo.

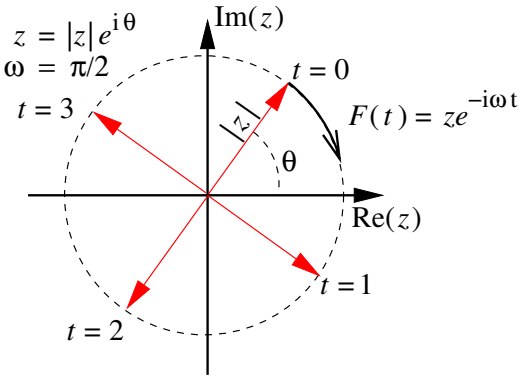


Figura 1: El fasor $F(t)$ empieza en $t = 0$ igual al número complejo $z = |z|e^{i\theta}$ y rota alrededor del origen con velocidad angular $\omega = \pi/2$. Cada incremento del tiempo en una unidad, corresponde a una rotación de $\pi/2$ radianes.

Ejercicio 2 [Respuesta: página 81] Comprueba que derivar el fasor $F(t) = Re^{-i(\omega t-\theta)}$ respecto del tiempo es equivalente a multiplicarlo por $-i\omega$, es decir,

$$\frac{dF(t)}{dt} = -i\omega F(t),$$

y que, por tanto,

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = -\omega^2 F(t).$$

El oscilador armónico

Esta propiedad permite resolver rápidamente muchas ecuaciones diferenciales lineales. Si sabemos que la solución de la ecuación es un fasor de la forma $F(t)$, a menudo podemos simplemente sustituirla en la ecuación y transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica para ω. Por ejemplo, en la ecuación del oscilador armónico,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

si suponemos que x es un fasor $x(t) = Re^{-i\omega t}$ y lo sustituimos en la ecuación diferencial (recordando que derivar $x(t)$ es equivalente a multiplicar $x(t)$ por $-i\omega$, entonces obtenemos

$$-m\omega^2 x(t) = -kx(t).$$

Descartando la solución trivial $x(t) = 0$, podemos dividir entre $x(t)$,

$$-m\omega^2 = -k,$$

o lo que es equivalente, la frecuencia debe ser

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Por tanto, el fasor

$$x(t) = Ae^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

es una solución posible de la ecuación diferencial del oscilador armónico.

Sin embargo, el fasor $x(t)$ es una función de valores complejos y en los problemas físicos de osciladores armónicos se buscan soluciones reales.

Ejercicio 3 [Respuesta: página 82] Para construir soluciones reales,

1. comprueba que la función compleja conjugada de $x(t)$ es

$$\bar{x}(t) = Ae^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

2. comprueba que $\bar{x}(t)$ también es solución de la ecuación diferencial del oscilador armónico.

3. comprueba que la partes real e imaginaria se pueden escribir como combinaciones lineales de $x(t)$ y $\bar{x}(t)$,

$$\mathrm{Re}(x(t)) = \frac{x(t) + \bar{x}(t)}{2},$$
$$\mathrm{Im}(x(t)) = \frac{x(t) - \bar{x}(t)}{2\mathrm{i}}.$$

   Como la ecuación diferencial es lineal, la combinación lineal de soluciones es también solución de la ecuación. Como tanto la parte real como la imaginaria son combinaciones lineales de soluciones, ambas son soluciones *reales* de la ecuación.

En resumen, si resolvemos una ecuación diferencial lineal con fasores y queremos soluciones reales, basta con quedarse con la parte real o la imaginaria.

Si queremos la solución general de la ecuación, podemos escribirla como combinación lineal de soluciones *independientes*. La solución general real puede escribirse como $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, con $\omega = \sqrt{k/m}$, y A y B constantes

reales arbitrarias. Como tanto el seno como el coseno pueden expresarse como combinaciones lineales de la exponencial $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ y su compleja conjugada, llegamos a la conclusión de que las exponenciales $x(t)$ y $\bar{x}(t)$ son también soluciones independientes, por lo que podemos escribir la solución general en la forma alternativa $C\exp(-\mathrm{i}\omega t) + D\exp(\mathrm{i}\omega t)$, donde C y D son números complejos cualesquiera.

En adelante, utilizaremos un punto para indicar derivada respecto del tiempo, es decir, escribiremos la velocidad

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

y la aceleración

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ejercicio 4 [Respuesta: página 83] Imaginemos que un oscilador armónico tiene en el instante inicial $t = 0$ una velocidad $\dot{x}(0) = -1$ m/s y que está localizado en $x(0) = 1$ m. Calcular el valor de las constantes A y B tales que

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

siendo $\omega = \sqrt{k/m}$. Comprobar que esta solución es equivalente a la parte real de la solución compleja

$$x(t) = (A + \mathrm{i}B)e^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

En otras palabras, podemos escribir fácilmente cualquier solución particular real como la parte real de una exponencial compleja.

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \mathrm{Re}\left((A + \mathrm{i}B)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right).$$

La estrategia de sustituir una solución de prueba de forma exponencial en la ecuación nos puede llevar a pensar sobre la manera específica en que hemos construido los fasores. ¿Por qué tienen un signo negativo en el exponente? ¿Por qué hay un factor i? ¿No podríamos haber usado $e^{+\mathrm{i}\omega t}$ o simplemente $e^{\omega t}$? La respuesta es que sí, pero hemos escogido el signo negativo y el factor i por conveniencia. Así podemos utilizar con comodidad la fórmula de Euler y la propiedad vista en el ejercicio anterior, que permite escribir el desfase como el número complejo $(A + \mathrm{i}B)$, donde A y B son los coeficientes del coseno y el seno, respectivamente, en la solución real de la ecuación.

Ejercicio 5 [Respuesta: página 84] Comprueba que se obtienen las mismas soluciones de la ecuación armónica con soluciones de prueba de la forma $x(t) = e^{+\mathrm{i}\omega' t}$ y $x(t) = e^{\omega'' t}$ y que las frecuencias angulares ω' y ω'' se relacionan con la ω calculada antes de la siguiente manera:

$$\omega' = -\omega,$$
$$\omega'' = -\mathrm{i}\omega.$$

El oscilador amortiguado

No es que resulte muy emocionante encontrar solución a la ecuación del oscilador armónico, muchos la conocíamos ya desde los cursos de física del instituto. Sin embargo, se puede aplicar la misma técnica para resolver de manera sencilla otras ecuaciones diferenciales lineales más complicadas.

Ejercicio 6 [Respuesta: página 84] Sumergimos un oscilador armónico en un fluido que produce sobre el oscilador una fricción proporcional a su velocidad (aunque de sentido contrario) $-\gamma\dot{x}$. La ecuación del movimiento se convierte ahora en

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}.$$

Demuestra que el fasor $x(t) = x(0)e^{-\mathrm{i}\omega t}$ es solución de la ecuación si la frecuencia angular cumple la relación

$$\omega = \frac{-\mathrm{i}\gamma \pm \sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}.$$

Llamemos ω_1 y ω_2 a las frecuencias que se obtienen de escoger el signo positivo o negativo en la ecuación anterior. La solución general de la ecuación diferencial será entonces

$$x(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + Be^{-\mathrm{i}\omega_2 t},$$

para constantes arbitrarias A y B.

En el caso en que $\gamma = 2\sqrt{mk}$ (llamado de *amortiguamiento crítico*), las dos frecuencias mencionadas en el ejercicio 5 colapsan al mismo valor, $\omega_1 = \omega_2$, pero para escribir la solución general necesitamos *dos funciones independientes*.

Ejercicio 7 [Respuesta: página 85] Comprueba que en el caso de que $\gamma = 2\sqrt{mk}$ la función $te^{-\mathrm{i}\omega t}$ (siendo $\omega = -\mathrm{i}\gamma/(2m)$) también es solución de la

ecuación diferencial y que, por lo tanto, la solución general se puede escribir

$$x(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega t} + Bte^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Encuentra la solución particular con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 2$.

El oscilador forzado

La ecuación del oscilador amortiguado se clasifica como *lineal* y *homogénea*. Lineal, porque los términos incluyen a la función $x(t)$ y sus derivadas, pero no hay términos que multipliquen estas funciones entre sí, como $\dot{x}x$ o $\ddot{x}^2 = \ddot{x}\ddot{x}$. Homogénea, porque no hay términos independientes de x y sus derivadas. Sin embargo, si al oscilador amortiguado le añadimos una fuerza externa independiente de su posición $F(t)$ que puede o no depender del tiempo, entonces obtenemos la ecuación del oscilador forzado,

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx + F(t).$$

La ecuación del oscilador amortiguado se puede entender entonces como el caso particular en el que la fuerza externa se anula, $F(t) = 0$. La ecuación forzada sigue siendo lineal, pero ha dejado de ser homogénea. La teoría de ecuaciones diferenciales nos enseña que la solución general de este tipo de ecuaciones se puede escribir como la solución de la ecuación homogénea (es decir, con $F(t) = 0$) más una solución particular.

Ejercicio 8 [Respuesta: página 86] Denotaremos con x_H la solución general de la ecuación homogénea

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$$

y con x_P una solución particular de la ecuación no homogénea

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx + F(t).$$

Comprueba que $x = x_H + x_P$ es solución de la ecuación no homogénea.

Ejercicio 9 [Respuesta: página 86] Tenemos un muelle de constante k colocado verticalmente y colgamos de él una masa m. Halla el movimiento que realizará la masa tras soltarla. Despreciaremos la masa del muelle y la fricción del aire ($\gamma = 0$).

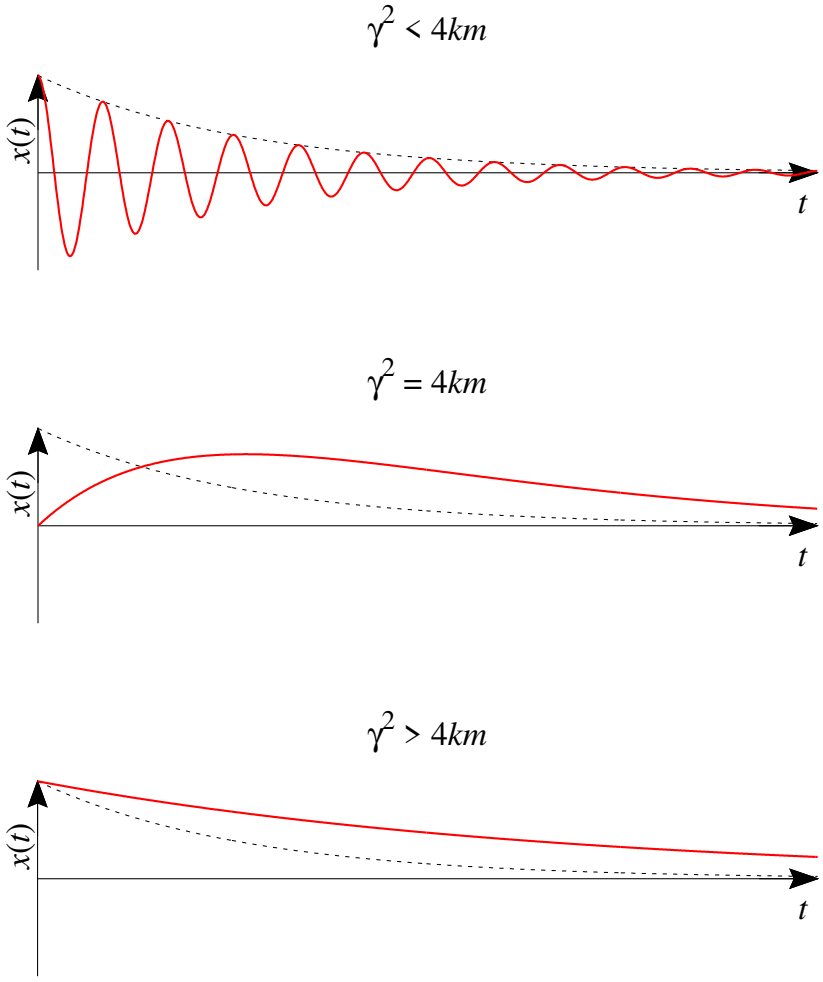


Figura 2: Elongación $x(t)$ de distintos movimientos amortiguados frente al tiempo. En el caso subamortiguado (*arriba*), $\gamma < 2\sqrt{km}$ y la solución oscila con amplitud cada vez menor. La línea discontinua representa la función $e^{-\gamma t/(2m)}$. Cuando existe amortiguamiento crítico (*centro*), $\gamma = 2\sqrt{km}$. La línea discontinua se convierte entonces en una solución posible del movimiento para unos valores de las condiciones iniciales, pero otros valores darán gráficas distintas. Aquí se ha representado con línea continua la solución del ejercicio 7. En el caso sobreamortiguado (*abajo*) $\gamma > 2\sqrt{km}$, y la posición se amortigua más lentamente que la función $e^{-\gamma t/(2m)}$.

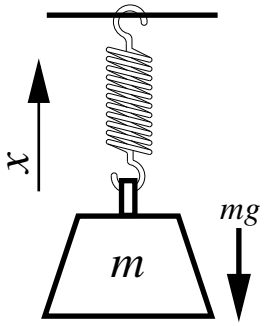


Figura 3: Al colgar una masa de un muelle vertical y soltarla, la posición y elongación iniciales son nulas.

Ejercicio 10 [Respuesta: página 87] Vamos a repetir el ejercicio anterior añadiendo el efecto del rozamiento del aire ($\gamma > 0$). Comprueba que la solución particular calculada en la resolución del ejercicio anterior sigue siendo válida. Halla el movimiento de la masa.

Si $\gamma > 0$, la solución de la ecuación homogénea se amortigua, es decir, tiende a cero a medida que avanza el tiempo.

$$\lim_{t\to\infty} x_H(t) = 0.$$

Esto implica que, en la solución general de la ecuación no homogénea, cuando el tiempo es muy largo, la solución general tiende a la solución particular.

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \;\to\; x_P(t), \text{ cuando } t \to \infty.$$

En otras palabras, la solución particular representa el comportamiento de la solución general para tiempos muy largos. En un movimiento subamortiguado, por ejemplo, como la amplitud de la oscilación amortiguada decae como la exponencial $\exp(-\gamma t/(2m))$, la solución $x_P(t)$ será una aproximación muy buena a la solución general cuando $t \gg 2m/\gamma$.

En muchas aplicaciones prácticas, la forzante externa es una función periódica del tiempo, como $F(t) = F_0\cos(\omega_F t)$ o $F(t) = F_0\sin(\omega_F t)$. Escribiremos ω_F para distinguir la frecuencia angular de la forzante externa de la frecuencia ω que hemos estado calculando hasta ahora. Para el oscilador armónico, la frecuencia es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y se le suele llamar la *frecuencia natural* de oscilación. Corresponde a la oscilación en ausencia de fuerzas exteriores. Al introducir la fricción, obtenemos la frecuencia *amortiguada* ω. Como hemos visto, se puede determinar a partir de m, γ y k. En cambio, ω_F puede ser arbitrario, según agitemos la masa más o menos lento.

Ejercicio 11 [Respuesta: página 89] Consideremos la ecuación diferencial del oscilador forzado con una forzante compleja,

$$F(t) = F_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Comprueba que el fasor $x(t) = x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ resuelve la ecuación, siempre que la constante x_0 valga

$$x_0 = \frac{F_0}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F \gamma}.$$

Ejercicio 12 [Respuesta: página 89] Para resolver el caso en que tenemos una forzante real de la forma

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_F t),$$

nos fijamos en que $F(t)$ es la parte real de la forzante considerada en el ejercicio anterior,

$$F(t) = \mathrm{Re}\left(F_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}\right),$$

y por lo tanto la solución es la parte real de la solución calculada en el caso anterior. Halla la solución y comprueba que satisface la ecuación. Recuerda que en este caso estamos suponiendo que F_0 es un número real.

Ejercicio 13 [Respuesta: página 92] Ahora vamos a resolver la ecuación con otra forzante real,

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_F t),$$

con F_0 real. El seno se puede escribir en términos de exponenciales complejas

$$\sin(\omega_F t) = \frac{e^{\mathrm{i}\omega_F t} - e^{-\mathrm{i}\omega_F t}}{2i}.$$

La forzante es la suma de dos exponenciales complejas, así que podemos escribir la solución particular como suma de las soluciones particulares para estas dos exponenciales consideradas por separado.

Para resolver problemas con forzantes más generales de la forma $F(t) = A\cos(\omega_F t) + B\sin(\omega_F t)$ basta darse cuenta de que

$$F(t) = \mathrm{Re}\left((A + \mathrm{i}B)e^{-\mathrm{i}\omega_F t}\right).$$

Entonces podemos escoger $F_0 = A + \mathrm{i}B$, resolver como en el ejercicio 11 y, después, tomar la parte real de la solución. En particular, podríamos haber resuelto así el ejercicio 13, pero la idea ahí era ilustrar que, si tenemos una

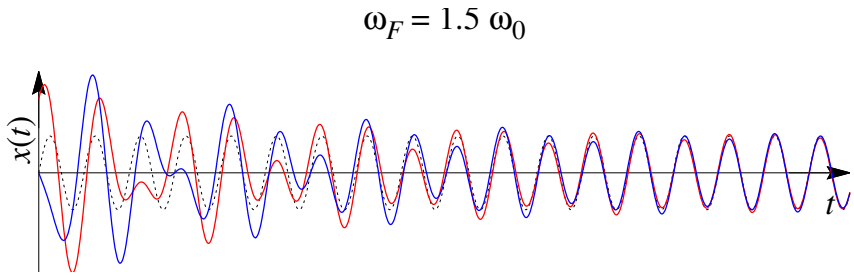


Figura 4: Elongación $x(t)$ frente al tiempo para un oscilador forzado. La línea discontinua corresponde a la solución $x_P(t)$ calculada en el ejercicio 13. Las líneas continuas azul y roja corresponden a diferentes condiciones iniciales. Al avanzar el tiempo, todas las soluciones se van aproximando a x_P. A la solución para tiempos largos se le suele llamar *estacionaria*.

forzante que es la suma de otras dos para las que sabemos resolver la ecuación del movimiento forzado, entonces la solución para la suma de forzantes es la suma de soluciones para las forzantes por separado.

Ejercicio 14 [Respuesta: página 93] En el movimiento forzado del ejercicio 11 obtuvimos una amplitud de oscilación compleja

$$x_0 = \frac{F_0}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F\gamma}.$$

La amplitud real del movimiento no es más que el módulo $|x_0|$. Calcula $|x_0|$ y busca la frecuencia de resonancia (es decir, la frecuencia para la que $|x_0|$ es máxima). Muestra que la amplitud de resonancia será mayor cuanto menor sea el valor absoluto de γ.

Aquí viene bien una advertencia. Se puede definir la frecuencia de resonancia como aquella para la que la amplitud de la *velocidad* $\dot{x}(t)$ es máxima, en lugar de la amplitud de la elongación x(t). En ese caso, la frecuencia de resonancia coincide *exactamente* con la frecuencia natural $\omega_F = \pm\sqrt{k/m} = \omega_0$. Para comprobarlo, se puede partir del módulo $|\dot{x}|$ de la velocidad

$$\dot{x}(t) = \frac{-F_0\mathrm{i}\omega e^{-\mathrm{i}\omega t}}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F\gamma},$$

y buscar el valor de ω_F que lo haga máximo, pero tengo que confesar que yo he hecho la comprobación pidiendo al ordenador que hiciera la derivada y despejara ω_F.

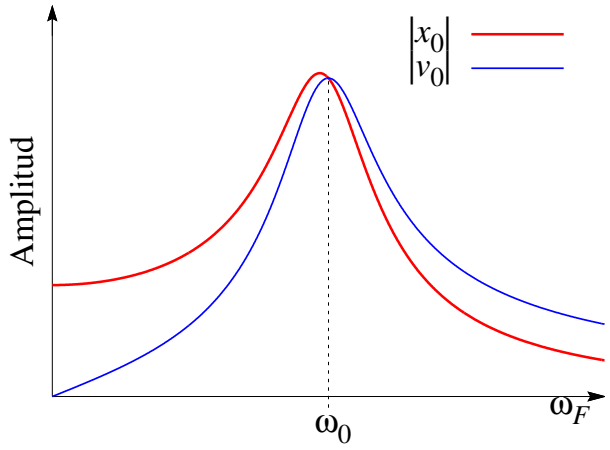


Figura 5: Amplitud de oscilación $|x_0| = |x(t)|$ (*línea roja*) cuando $t \to \infty$ (amplitud de la solución estacionaria). Para valores pequeños del coeficiente de fricción el máximo queda cerca de la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Si en lugar de considerar el fasor de las posiciones nos fijamos en el de las velocidades $\dot{x}(t) = v(t) = v_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$, encontramos que el módulo de este fasor $|v_0|$ (*línea azul*) tiene un máximo *exactamente* en $\omega_F = \omega_0$ en todos los casos.

Ecuaciones diferenciales

Coeficientes constantes

En el capítulo anterior vimos casos particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, cuya forma general es

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t),$$

donde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ son números independientes de x y t. Llamamos a n el *orden* de la ecuación diferencial. En el capítulo anterior, teníamos ecuaciones diferenciales de segundo orden, $n = 2$, con $a_2 = m$, $a_1 = \gamma$ y $a_0 = k$. Evidentemente, las técnicas de resolución que utilizamos ahí se aplican igual al caso general.

Inicialmente, dejaremos de pensar en la variable t como un tiempo y operaremos con fasores sin preocuparnos de su interpretación. Comencemos por la ecuación homogénea,

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0.$$

Si sustituimos una solución de la forma $x(t) = e^{-\mathrm{i}\omega t}$, y descartamos la solución trivial $x(t) = 0$ (para dividir por x), obtenemos una condición para la frecuencia ω llamada *ecuación indicial*,

$$a_n(-\mathrm{i}\omega)^n + a_{n-1}(-\mathrm{i}\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(-\mathrm{i}\omega) + a_0 = 0.$$

Supongamos que resolvemos esta ecuación y encontramos las frecuencias distintas $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{n-1},\ \omega_n$. Entonces la solución general será

$$x(t) = A_1 e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + A_2 e^{-\mathrm{i}\omega_2 t} + \ldots + A_{n-1} e^{-\mathrm{i}\omega_{n-1} t} + A_n e^{-\mathrm{i}\omega_n t},$$

con $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}, A_n$ coeficientes arbitrarios.

Ejercicio 15 [Respuesta: página 94] Encuentra la solución general de

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Cuando en la ecuación indicial nos encontremos con raíces repetidas, la solución correspondiente a la frecuencia repetida se escribe como una combinación lineal de exponenciales por potencias de t. Si tenemos las frecuencias $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{n-1}, \omega_n$ con multiplicidades $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{n-1},\ m_n$, la solución general es

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{ij} t^j e^{-\mathrm{i}\omega_i t},$$

con los coeficientes arbitrarios A_{ij}. Un par de ejemplos, lo dejarán más claro.

Ejercicio 16 [Respuesta: página 95] Para la ecuación

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0,$$

escribe la ecuación indicial y demuestra que tiene la raíz triple $\omega = \mathrm{i}$. Comprueba que la solución general se puede escribir

$$x(t) = A_1 e^t + A_2 t e^t + A_3 t^2 e^t.$$

Ejercicio 17 [Respuesta: página 95] Encuentra la solución general de

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 1 = 0.$$

La resolución de la ecuación no homogénea

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

tampoco tiene misterio, siempre que $f(t)$ sea una función expresable como suma de fasores. La estrategia es la misma que en el capítulo anterior: buscamos una solución particular y se la sumamos a la solución de la ecuación homogénea.

Ejercicio 18 [Respuesta: página 95] Resuelve

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 1 = F_0 \cos(\omega_F t).$$

Ejercicio 19 [Respuesta: página 96] Consideremos un caso en el que $f(t)$ es la suma de dos funciones periódicas de frecuencias diferentes, ω_{F_1} y ω_{F_2}.

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = F_1\cos(\omega_{F_1}t) - F_2\sin(\omega_{F_2}t).$$

Halla la solución general.

Ecuación equidimensional de Euler-Cauchy

Algunas ecuaciones diferenciales se pueden convertir en lineales con coeficientes constantes. En el caso de las ecuaciones lineales de segundo orden se puede incluso determinar cuándo es posible un cambio de variable así. Sea la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x),$$

donde la prima indica derivación respecto de x, e imaginemos que existe un cambio de variable de x a t que transforma la ecuación anterior en otra lineal de coeficientes constantes. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y'\frac{dx}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= y''\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + y'\frac{d^2x}{dt^2}.\end{aligned}$$

Despejando y' e y'', podemos sustituirlos en la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(P(x)\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dy}{dt} + Q(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 y = F(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Si la nueva ecuación tiene solamente coeficientes constantes, entonces $Q(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ debería ser igual a una constante (llamémosla b).

$$Q(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = b.$$

Integrando esta ecuación diferencial tenemos

$$t = \int\sqrt{\frac{b}{Q(x)}}dx.$$

Como esta relación implica que

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{b}{Q(x)}},$$

podemos sustituir esta expresión en el coeficiente de $\frac{dy}{dt}$ de la ecuación diferencial para obtener (operando con muchísimo cuidado) la condición

$$\frac{2P(x)Q(x) + Q'(x)}{(Q(x))^{3/2}} = \text{constante}.$$

Llegamos a la conclusión de que existe un cambio de variables que convierte la ecuación diferencial original en una lineal de coeficientes constantes si y solo si se satisface la condición anterior.

Ejercicio 20 [Respuesta: página 97] Encuentra la solución general de

$$y'' + \left(x - \frac{1}{x}\right) y' + x^2 y = 0.$$

También se pueden convertir en ecuaciones de coeficientes constantes las de primer orden lineales

$$y' + Q(x)y = F(x),$$

mediante el cambio de variable

$$t = \int Q(x)dx.$$

Ejercicio 21 [Respuesta: página 98] Resuelve

$$y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

He preparado los dos problemas anteriores de una manera un tanto artificial, pero hay una clase de ecuaciones de la categoría que estamos considerando, llamadas de *Euler-Cauchy* o *equidimensionales*, que sí aparecen de vez en cuando en la práctica.

Ejercicio 22 [Respuesta: página 99] Comprueba que la ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0,$$

(donde p y q son constantes) se convierte en una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes tras aplicar el cambio de variable $x = e^t$.

Ejercicio 23 [Respuesta: página 100] La misma técnica se aplica a las ecuaciones de Euler-Cauchy de orden mayor. Por ejemplo, comprueba que también se puede convertir en una ecuación de coeficientes constantes

$$ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0,$$

(con a, b, c y d constantes) con el mismo cambio de variable $x = e^t$.

Ecuación de ondas

Aquí solo quiero ilustrar la utilidad de los fasores como herramienta de cálculo así que, en lugar de derivar rigurosamente la ecuación de ondas, os daré una explicación sencilla de su origen. Empezamos con un cable tenso como la cuerda de una guitarra a lo largo del eje x y nos preguntamos sobre su movimiento si comienza a vibrar. Suponemos que los desplazamientos son pequeños y que cada punto puede oscilar verticalmente. Para escribir la segunda ley de Netwon, hay que tener en cuenta que tenemos una distribución continua de masa en lugar de tenerla concentrada en un punto. Si usamos ρ para representar la densidad de la cuerda, e $y(x,t)$ para su desplazamiento vertical en el punto x y tiempo t, la fuerza en el tramo entre $x = a$ y $x = b$ será

$$F(t) = \int_a^b \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx.$$

Para cada punto de la cuerda, la ley de Newton se convierte en

$$\text{densidad de masa} \times \text{aceleración} = \text{densidad de fuerza},$$
$$\rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t).$$

Podría parecer que la densidad de fuerza $f(x,t)$ será proporcional a cuánto se ha desplazado la cuerda verticalmente en el punto x, pero esto no es correcto. En la figura 6 se ve que ni el desplazamiento vertical ni la pendiente determinan la densidad de fuerza, sino que depende de la curvatura. Dividiendo la ecuación anterior por ρ, y teniendo en cuenta que $f(x,t)$ es proporcional a la curvatura de $y(x,t)$, obtenemos la *ecuación de ondas*:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.$$

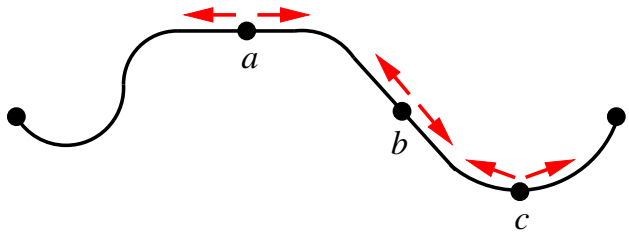


Figura 6: Una cuerda tensa deformada. La fuerza debida a la tensión de la cuerda a la izquierda del punto a se cancela con la fuerza por la derecha. Lo mismo ocurre en el punto b. En el punto c, debido a la curvatura de la cuerda hay una fuerza neta hacia arriba.

La constante c^2 es simplemente una constante de proporcionalidad. Cuando nos fijamos en las unidades, vemos que a la izquierda tenemos unidades de aceleración (distancia dividida por tiempo al cuadrado), mientras que la segunda derivada de $y(x,t)$ con respecto de x dos veces tiene unidades de inverso de distancia. Para que encajen las unidades a los dos lados de la ecuación, la constante c^2 debe tener unidades de velocidad al cuadrado (distancia al cuadrado dividida por tiempo al cuadrado). De ahí que hayamos escogido llamar a la constante de proporcionalidad c^2, porque así tenemos un parámetro c con unidades de velocidad. Más adelante, veremos que esta c es precisamente la velocidad de una onda sinusoidal.

La ecuación de ondas tiene derivadas tanto de la posición como del tiempo y se clasifica por tanto como una *ecuación diferencial en derivadas parciales*. Para tratar estas ecuaciones, se usa habitualmente el método de separación de variables, que consiste en buscar soluciones que son productos de funciones en los que cada función depende de una de las variables solamente. Por ejemplo, en la ecuación que nos ocupa, buscaremos soluciones de la forma $y(x,t) = Y(x)T(t)$, donde la función Y no depende de t, ni la función T de x. Sustituyendo en la ecuación de ondas,

$$Y(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2} = c^2T(t)\frac{d^2Y(x)}{dx^2},$$

obtenemos expresiones que se pueden escribir con todas las funciones de t a un lado de la igualdad y todas las funciones de x al otro.

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{Y(x)}\frac{d^2Y(x)}{dx^2}.$$

Ahora, la única manera de que las funciones a la izquierda y derecha de la igualdad puedan ser iguales entre sí, es que ambas sean iguales a la misma constante. ¿Por qué? La razón es sencilla, cada lado de la igualdad es función

de una variable distinta, que pueden variar independientemente. Consideremos la siguiente ecuación para las funciones f y g:

$$f(x) = g(t).$$

Aunque la forma funcional de f y g sea la misma, por ejemplo $f(x) = \cos(x)$ y $g(t) = \cos(t)$, la igualdad no se puede cumplir en general para valores arbitrarios de x y t. La única manera de garantizar que la ecuación se cumpla, sean cuales sean los valores de x y t es que ambas funciones sean iguales a la misma constante en todos los puntos. Para la ecuación de ondas, llamaremos a la constante común ω^2, por razones que serán evidentes en un momento.

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \omega^2,$$
$$\frac{c^2}{Y(x)}\frac{d^2Y(x)}{dx^2} = \omega^2.$$

Reconocemos la primera ecuación como la del oscilador armónico

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} - \omega^2 T(t) = 0.$$

y escribimos la solución directamente

$$T(t) = e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

comprobando que, efectivamente, la constante que antes llamamos ω^2 coincide con el cuadrado de la frecuencia angular del oscilador. La segunda ecuación también tiene la forma de la ecuacón del oscilador armónico

$$\frac{d^2Y(x)}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c^2}Y(x) = 0,$$

pero en este caso, por utilizar la misma notación empleada habitualmente, ensayamos sustituimos una solución de la forma $Y(x) = e^{-kx}$, que produce la condición

$$k = \pm\frac{\omega}{c}$$

conocida como *relación de dispersión.*

Hemos llegado a la conclusión de que, para cada frecuencia angular ω que escojamos, existen soluciones de la forma

$$y(x,t) = Y(x)T(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega t}e^{\pm \mathrm{i}kx} = Ae^{-\mathrm{i}(\omega t \pm kx)}.$$

Tenemos muchas soluciones independientes para la ecuación de ondas: dos por cada frecuencia (una para el signo positivo del exponente y otra para el

negativo). ¿Será la combinación lineal de estas funciones igual a la solución general?

Ejercicio 24 [Respuesta: página 100] Para hallar directamente la solución general, vamos a resolver la ecuación de ondas de otra manera. Realiza el cambio de variables $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, e integra directamente la ecuación diferencial. Comprueba que se obtiene una solución de la forma

$$y(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

donde F y G son funciones que no tienen por qué ser exponenciales. Verifica que, de hecho, pueden ser cualquier función que tenga sentido derivar dos veces.

Nos encontramos aquí ante un misterio. Por una parte, vemos que las soluciones de la ecuación de ondas son combinaciones lineales de exponenciales. Por otra, la solución es la suma de dos funciones arbitrarias. ¿Son estas dos soluciones equivalentes? ¿Implicaría eso que, por tanto, podemos escribir funciones arbitrarias como combinaciones lineales de exponenciales? Volveremos sobre esta pregunta en las páginas que quedan por delante.

Ejercicio 25 [Respuesta: página 101] Puedes imaginar la función $F(x+ct)$ como $F(x)$ trasladándose hacia la izquierda con velocidad c. $G(x-ct)$, por el contrario, viaja hacia la derecha con velocidad c. Asegúrate de entender esto.

Ecuación del calor

Para hacernos una idea del origen de la ecuación del calor, empezamos con unas observaciones sencillas. Al poner en contacto objetos a temperaturas diferentes, las temperaturas tienden a igualarse. El más frío se calienta y el otro se enfría. La rapidez con la que cambia la temperatura es mayor cuanto mayor es la diferencia entre las temperaturas.

Queremos describir la distribución de temperatura a lo largo de una barra delgada situada sobre el eje x. Utilizaremos la función $u(x,t)$ para indicar el valor de la temperatura en el punto x al tiempo t. Nuestra primera observación parece sugerir que la variación de temperatura será proporcional a la derivada de la distribución de temperaturas, pero esto vuelve a ser una impresión incorrecta. Si bien el *flujo de calor* Q es proporcional a la pendiente de u,

$$Q = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x},$$

esto no implica que la temperatura cambie en proporción directa a la pendiente $\partial u/\partial x$. Para entender por qué, imaginemos que inicialmente u incrementa linealmente con x

$$u(x,0) = Ax + B,$$

con $A > 0$. Entonces, el calor fluye de derecha a izquierda, pero si nos fijamos en un punto dado, la cantidad de calor que viene por la derecha iguala a la que se marcha por la izquierda, así que en ese punto la barra ni se calienta ni se enfría. Para que cambie la temperatura, necesitamos que al punto entre una cantidad de calor diferente de la que sale, y esto ocurre solo cuando la pendiente está cambiando o, en otras palabras, la distribución u está curvada en ese punto.

Esperamos, pues, que la temperatura cambie con la segunda derivada de u. Cuando sea positiva esta segunda derivada (como en cualquier mínimo de u), habrá una acumulación neta de calor en el punto y aumentará la temperatura, mientras que cuando la segunda derivada sea negativa disminuirá u. Concluimos que la ecuación diferencial buscada será

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La constante α se llama *difusividad térmica* y tiene unidades de distancia al cuadrado dividida por tiempo y temperatura.

Ejercicio 26 [Respuesta: página 101] Utiliza la técnica de separación de variables que vimos en el apartado anterior para resolver la ecuación del calor.

En ocasiones, nos interesa determinar la distribución de temperatura estacionaria, es decir, qué temperatura alcanza la barra finalmente. Como ya no habrá cambios,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

y la ecuación del calor se convierte en

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0.$$

Las derivadas parciales se sustituyen por derivadas totales porque la función u estacionaria no depende del tiempo.

Ejercicio 27 [Respuesta: página 102] Supongamos que nuestra barra se encuentra entre los puntos $x = 0$ y $x = L$. En sendos extremos colocamos termostatos que mantienen la temperatura fija a los valores u_0 y u_L, respectivamente. Determina la distribución final de temperatura sobre la barra.

Llegados a este punto, el misterio de las exponenciales se vuelve más profundo. Cuando teníamos ondas en una cuerda, vimos que existe mucha libertad para especificar la forma de la onda. Pensando en términos físicos, podemos tirar de la cuerda de modo que aparezcan sobre ella esquinas no derivables. Sin embargo, nuestra otra solución contenía solo una superposición de exponenciales, y estas son derivables en todo punto. Ahora, con la ecuación del calor, encontramos de nuevo soluciones exponenciales, pero la distribución $u(x,t)$ no tiene por qué ser continua siquiera. En el ejercicio anterior, puede que la temperatura de la barra antes de ponerla en contacto con los termostatos fuera $(u_0+u_L)/2$. Si $u_0 \neq u_L$, entonces la distribución tendría discontinuidades en los extremos $x=0$ y $x=L$. En realidad, cualquier problema que consista en poner en contacto objetos a temperaturas diferentes empezará con una discontinuidad en la temperatura. ¿Se pueden utilizar las soluciones exponenciales para describir estas situaciones? Volveremos a encontrarnos con esta pregunta en el capítulo final.

La distribución de temperatura en el seno de una estructura tridimensional satisface una ecuación del calor más general:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u,$$

siendo ∇^2 el operador *laplaciano*,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

La versión estacionaria de esta ecuación se conoce con el nombre de *ecuación de Laplace*,

$$\nabla^2 u = 0.$$

Para cerrar este capítulo, nos enfrentaremos a un problema más difícil: calcularemos la distribución de temperatura estacionaria sobre un disco plano. En unidades adecuadas, tendremos un disco de radio unidad.

Ejercicio 28 [Respuesta: página 103] Comencemos transformando a coordenadas polares la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ejercicio 29 [Respuesta: página 104] Utiliza la técnica de separación de variables para convertir la ecuación diferencial en derivadas parciales obtenida en el ejercicio anterior en dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejercicio 30 [Respuesta: página 105] Resuelve la ecuación para la coordenada angular.

Ejercicio 31 [Respuesta: página 105] Ahora resuelve la ecuación para la coordenada radial.

Ejercicio 32 [Respuesta: página 106] Supongamos que sobre el borde del disco se mantiene la temperatura constante con una distribución que depende de la coordenada angular, de modo que la distribución de temperaturas $u(r, \theta)$ cumple

$$u(1, \theta) = u_0 \cos(\theta).$$

Encuentra la distribución estacionaria de temperaturas.

Vibraciones

Circuitos RLC

En el capítulo anterior atravesamos parte del campo de las ecuaciones diferenciales, equipados solo con nuestras funciones de prueba en forma de fasores, y conseguimos resolver las ecuaciones de ondas y del calor. Desde el punto de vista de las aplicaciones a sistemas físicos, no hay duda de que hemos llegado a un lugar interesante, pero las soluciones encontradas, los campos de fasores $u(x,t)$, son conceptos más complejos que los fasores que vimos en el primer capítulo, pues dependen de la posición además del tiempo. ¿Se pueden utilizar los fasores del primer capítulo para representar sistemas que no sean las agujas de un reloj o una masa pegada a un muelle? Afortunadamente, sí.

En la figura 7, he dibujado un circuito eléctrico RLC con una resistencia (R), un inductor (de inductancia L) y un condensador (de capacidad C) conectados en serie a una fuente de tensión, $V(t)$, que puede ser variable en el tiempo. Para determinar la corriente que circula, necesitamos, primero, la *ecuación constitutiva* de cada componente, es decir, cómo se relaciona la diferencia de potencial entre sus bornes con la corriente que circula por él. Segundo, aplicaremos la ley de las tensiones de Kirchoff al efecto de conectarlas en serie. El objetivo aquí no es aprender teoría de circuitos, sino mostrar que podemos aplicar las mismas técnicas del primer capítulo a otros problemas que, en principio, parecen totalmente diferentes del oscilador armónico.

Empecemos por los componentes. La ley de Ohm relaciona la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia con la corriente que la atraviesa.

$$V_R(t) = I(t)\ R.$$

El inductor cumple la ley de Faraday,

$$V_L(t) = L\ \frac{dI}{dt}.$$

Por último, la diferencia de potencial a los lados de un condensador depende

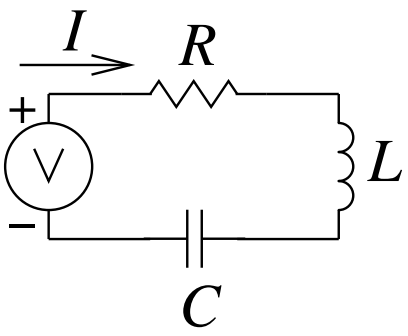


Figura 7: Un circuito RLC formado por una resistencia, un inductor y un condensador conectados en serie.

de cuánto se haya cargado y de su capacidad.

$$V_C(t) = V(0) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\ d\tau.$$

La segunda ley de Kirchoff afirma que en un circuito cerrado la caída de tensiones es igual a la tensión suministrada, es decir, $V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V(t)$.

$$I(t)\ R + L\ \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\ d\tau = V(t).$$

Derivando esta expresión para eliminar la integral, obtenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden para $I(t)$.

$$\frac{dI}{dt}\ R + L\ \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\ I(t) = \frac{dV}{dt}.$$

Ejercicio 33 [Respuesta: página 107] Resuelve la ecuación diferencial para el circuito RLC con $V(t) = V_0\ \sin(\omega_F t)$ teniendo en cuenta que es equivalente a la de un oscilador forzado.

Cajas negras

Cuando examinamos el oscilador forzado, vimos que los movimientos transientes decaen al estado estacionario cuando $t \gg 2m/\gamma$. En el circuito RLC, por tanto, nos quedará la solución estacionaria cuando $t \gg 2L/R$. Vamos a pensar en el estado estacionario del circuito en términos de una caja

negra, es decir, tratamos el circuito completo como un dispositivo desconocido al que le suministramos una señal (la tensión $V(t)$) y que responde con otra (la intensidad $I(t)$. Tomando la solución estacionaria del ejercicio 33, vemos que se puede escribir en la forma

$$I(t) = \frac{V_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}}{\frac{\mathrm{i}}{\omega_F C} - \mathrm{i}\omega_F L + R}.$$

La respuesta del circuito viene caracterizada por un solo número complejo,

$$Z = \frac{\mathrm{i}}{\omega_F C} - \mathrm{i}\omega_F L + R.$$

que por supuesto depende de la frecuencia. Entonces escribimos una ecuación constitutiva para nuestra caja negra parecida a la ley de Ohm:

$$V(t) = I(t)Z.$$

Llamamos a Z *impedancia*, y la definimos como $Z = V(t)/I(t)$.

Ejercicio 34 [Respuesta: página 108] Supongamos que $I(t) = I_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$. Utiliza las ecuaciones constitutivas para comprobar que la impedancia de la resistencia es $Z_R = R$ y la del inductor $Z_L = -\mathrm{i}\omega_F L$. Si derivamos la ecuación constitutiva del condensador, obtenemos

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{I(t)}{C}.$$

Supón que $V_C(t) = V_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ para demostrar que $Z_C = \mathrm{i}/(\omega_F C)$.

Tanto la resistencia como el inductor y el condensador son componentes lineales, es decir, aportan un término lineal a la ecuación diferencial para la intensidad $I(t)$. Resulta que la impedancia del circuito RLC en serie que vimos antes es igual a suma de las impedancias de sus componentes:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C.$$

Con componentes lineales, muchas veces podemos simplificar el análisis del circuito agrupando elementos y calculando su impedancia equivalente. Si se conectan en serie componentes de impedancias Z_1 y Z_2, equivalen a un elemento de impedancia $Z = Z_1 + Z_2$. Si se conectan en paralelo, la impedancia equivalente cumple $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$.

Ya vimos que la linealidad de la ecuación diferencial implica que, si tenemos una ecuación inhomogénea de la forma

$$\frac{dI}{dt}\ R + L\ \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\ I(t) = \frac{d}{dt}(V_1(t) + V_2(t)),$$

pero conocemos la solución estacionaria cuando a la derecha $V_1(t) = 0$ y cuando $V_2(t) = 0$ (llamemos $I_1(t)$ e $I_2(t)$ a estas soluciones) entonces, debido a que

$$\frac{d}{dt}(V_1(t) + V_2(t)) = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt},$$

la solución estacionaria de la ecuación inhomogénea no es más que la suma

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t).$$

En términos de cajas negras, podemos decir que si sumamos las señales de entrada, obtenemos la suma de las respuestas a cada señal.

Ejercicio 35 [Respuesta: página 108] A consecuencia de esta linealidad y del hecho de que la amplitud de la respuesta depende de la frecuencia, se pueden utilizar circuitos RLC para filtrar señales en función de su frecuencia. Por ejemplo, supongamos que aplicamos a nuestro circuito una tensión de la forma

$$V(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t),$$

donde $\omega_1 = 1/(5\sqrt{LC})$, $\omega_2 = 1/\sqrt{LC}$ y $\omega_3 = 5/\sqrt{LC}$. Calcula la intensidad de corriente que circulará. ¿Cuál sería el resultado si se multiplica el valor de L por 25 sin cambiar las frecuencias ω_1, ω_2 y ω_3?

Pequeñas vibraciones

En el primer capítulo examinamos en detalle la dinámica de una masa sujeta con un muelle lineal y en este hemos visto que podemos aplicar las mismas técnicas al circuito RLC en serie, que en principio parece un sistema completamente diferente. Sorprendentemente, el oscilador armónico representa el comportamiento de un sistema genérico que realiza pequeñas vibraciones en torno a un punto de equilibrio estable, desde una canica en el fondo de un tazón a estructuras complejas.

Por simplificar, imaginemos una partícula cuya energía potencial V depende de la coordenada x. Los puntos de equilibrio estable x_0 corresponden

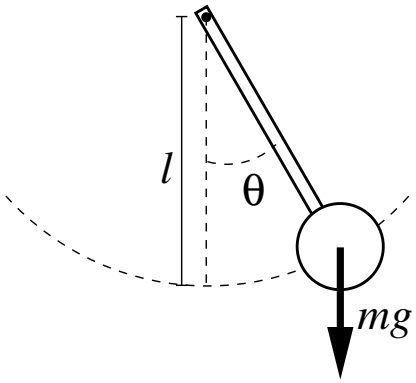


Figura 8: El péndulo simple: un punto de peso mg que solo puede desplazarse sobre un arco de circunferencia de radio l.

a los mínimos de $V(x)$. Supongamos que podemos desarrollar $V(x)$ en serie de Taylor en torno a x_0:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{V'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Como el punto x_0 es un mínimo, la primera derivada de V se anula en ese punto, así que $V'(x_0) = 0$. Para valores suficientemente pequeños de $(x - x_0)$ y siempre que $V''(x_0) \neq 0$ podemos aproximar el potencial mediante

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Ahora bien, la fuerza que siente la partícula en x será

$$F(x) \approx -\frac{\partial V}{\partial x} = -V''(x_0)(x - x_0).$$

En otras palabras, el mínimo de potencial se comporta como un muelle lineal de constante $k = V''(x_0)$ para desplazamientos pequeños cerca de ese punto, y la frecuencia de vibración será $\omega = \sqrt{V''(x_0)/m}$.

En física, el péndulo simple representa el caso paradigmático de un sistema así (Fig. 8). Aunque se puede tratar de manera más detallada, teniendo en cuenta el momento de inercia del disco y de la barra, como en el péndulo de un gran reloj de madera, esto solo complica las ecuaciones sin aportar al punto que quiero ilustrar, así que lo reduciremos una partícula puntal que se mueve sobre un arco de radio l, despreciando la masa de la barra. Entonces, la energía potencial del péndulo no es más que el peso por la altura del punto, que depende del ángulo θ,

$$V(\theta) = mg\ l(1 - \cos(\theta)).$$

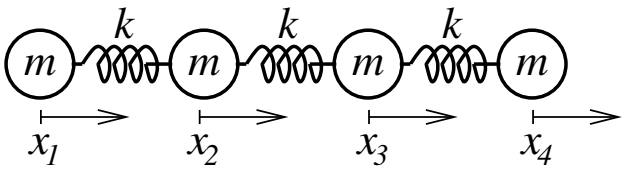


Figura 9: Un sistema de osciladores idénticos de masa m acoplados mediante muelles de constante k. Las coordenadas x_i representan el desplazamiento de cada masa respecto de su punto de equilibrio.

Ejercicio 36 [Respuesta: página 110] Desarrolla en serie de Taylor la energía potencial del péndulo y escribe su ecuación del movimiento para oscilaciones pequeñas. Determina el periodo. Ten en cuenta que θ es una coordenada angular, así que el equivalente a la segunda ley de Newton es

$$ml^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

es decir, el momento de inercia ml^2 por la aceleración angular $\ddot{\theta}$ es igual al momento de la fuerza.

Osciladores acoplados

El apartado precedente todavía no da idea del alcance que tienen los fasores para simplificar el estudio de las vibraciones. Vamos a complicar nuestro objeto de estudio imaginando una cadena de N masas conectadas por medio de muelles lineales (Fig. 9). Denotaremos con x_i el desplazamiento de la partícula número i respecto de su posición de equilibrio. La primera y última partícula tienen por ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2), \\ m\ddot{x}_N &= -k(x_N - x_{N-1}), \end{aligned}$$

repectivamente, mientras que las otras partículas obedecen

$$m\ddot{x}_n = -k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n),$$

con $n = 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1$. Expandiendo esta última expresión,

$$m\ddot{x}_n = -2kx_n + kx_{n-1} + kx_{n+1}.$$

Aunque en principio podríamos resolver las ecuaciones con diferentes masas y constantes de muelle, simplificaremos el tratamiento eligiendo partículas y muelles idénticos.

Empezaremos buscando soluciones para las que todas las partículas vibran con la misma frecuencia. Para ello, aplicamos la estrategia habitual de representar las coordenadas con fasores,

$$x_n(t) = \hat{x}_n e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

y los sustituimos en las ecuaciones. Ahora utilizamos $\hat{x}_n$ para el número complejo que contiene la amplitud y la fase inicial (antes usábamos el subíndice 0, pero ahora el subíndice representa el número de partícula). Para los extremos

$$\begin{aligned} -m\omega^2\hat{x}_1 &= -k\hat{x}_1 + k\hat{x}_2, \\ -m\omega^2\hat{x}_n &= k\hat{x}_{N-1} - k\hat{x}_N, \end{aligned}$$

y para las demás partículas

$$-m\omega^2\hat{x}_n = -2k\hat{x}_n + k\hat{x}_{n-1} + k\hat{x}_{n+1}.$$

Dejando todos los términos a la izquierda,

$$(2k - m\omega^2)\hat{x}_n - k\hat{x}_{n-1} - k\hat{x}_{n+1} = 0.$$

Este proceso ha convertido un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2)\hat{x}_1 - k\hat{x}_2 &= 0, \\ -k\hat{x}_1 + (2k - m\omega^2)\hat{x}_2 - k\hat{x}_3 &= 0, \\ &\vdots \\ (2k - m\omega^2)\hat{x}_n - k\hat{x}_{n-1} - k\hat{x}_{n+1} &= 0, \\ &\vdots \\ -k\hat{x}_{N-2} + (2k - m\omega^2)\hat{x}_{N-1} - k\hat{x}_N &= 0, \\ -k\hat{x}_{N-1} + (k - m\omega^2)\hat{x}_N &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, no podemos resolver el sistema porque tenemos un parámetro desconocido: la frecuencia ω.

Escribamos nuestras ecuaciones en notación matricial. Dividiendo todas las ecuaciones entre k y utilizando $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para simbolizar la frecuencia

natural de un muelle aislado, convertimos el sistema en

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N-1} \\ \hat{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De manera abreviada, escribiremos el sistema como $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{A}$ representando la matriz, $\hat{\mathbf{x}}$ el vector de componentes $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \dots,\ \hat{x}_N$ y $\mathbf{0}$ el vector nulo. Al ser homogéneo, evidentemente siempre tiene por solución

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \dots = \hat{x}_{N-1} = \hat{x}_N = 0,$$

pero si queremos que tenga también soluciones interesantes en las que las partículas se muevan, entonces hay que exigir que el determinante de la matriz se anule ($\det(A) = 0$) o, en otras palabras, que el sistema sea compatible indeterminado.

Ejercicio 37 [Respuesta: página 110] En una cadena de $N = 3$ osciladores, calcula las frecuencias naturales de vibración del sistema.

Ejercicio 38 [Respuesta: página 111] Determina cómo se mueven las partículas para cada una de las frecuencias calculadas en el ejercicio anterior.

En lugar de escribir por separado las ecuaciones del movimiento de las masas de los extremos, podemos decir que todas las partículas obedecen la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x}_n = -2kx_n + kx_{n-1} + kx_{n+1},$$

para $n = 1,\ 2,\ \dots,\ N$, añadiendo que $x_0 = x_1$ y $x_{N+1} = x_N$, siendo x_0 y x_{N+1} coordenadas que no corresponden a ninguna de las masas.

Ejercicio 39 [Respuesta: página 112] Se pueden imponer otras condiciones en los bordes. Supongamos que queremos representar una cadena con los extremos sujetos a puntos fijos con muelles (como en la figura 10). ¿Qué valores se debe dar a x_0 y x_{N+1} en esta situación? Otra alternativa habitual son las condiciones de contorno periódicas, en las que los extremos están

en contacto con copias idénticas del sistema a izquierda y derecha ¿cómo se representa esta situación en términos de x_0 y x_{N+1}?

Ejercicio 40 [Respuesta: página 112] Demuestra que la suma de soluciones del sistema $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ también será una solución.

Esta propiedad implica que, si conocemos tantas soluciones linealmente independientes como variables (tal y como ocurría en el ejercicio 38) entonces podemos escribir cualquier solución del sistema como combinación lineal de las que ya conocemos.

Ejercicio 41 [Respuesta: página 113] Si en la cadena de tres masas tiramos de la primera, manteniendo fijas las otras ($x_1 = -1$ y $x_2 = x_3 = 0$) y soltamos ¿cómo se moverán las masas?

Al escribir las funciones $x_i(t)$ mediante fasores, hemos supuesto implícitamente que la cadena de muelles permanece en el mismo sitio, aunque las masas oscilen. Como las fuerzas sobre las masas dependen solo de la separación relativa entre masas, podría ocurrir que la cadena completa se estuviera desplazando con velocidad v. Las soluciones tendrían entonces la forma

$$x_n(t) = \hat{x}_n e^{-\mathrm{i}\omega t} + vt.$$

pero seguirían obedeciendo la misma ecuación del movimiento porque la segunda derivada de vt se anula. Omitir el término vt equivale a decir que en nuestras coordenadas $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ el centro de masas permanece fijo.

Ejercicio 42 [Respuesta: página 114] Si la cadena de tres osciladores empieza en reposo y la primera masa recibe un golpe que le imparte la velocidad v, ¿cómo se moverán a partir de ese momento las partículas? Ten en cuenta que si $\dot{x}_1 = v$ y $\dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$, el centro de masas se encuentra en movimiento.

Modos normales

Ya sabemos resolver las ecuaciones del movimiento para cadenas de osciladores armónicos acoplados. Hemos visto que existen soluciones muy concretas para las que todas las masas acopladas oscilan con una misma frecuencia. Se llama a estas soluciones *modos normales*. Sabemos que podemos escribir otras soluciones como combinación lineal de estos modos normales, que exa-

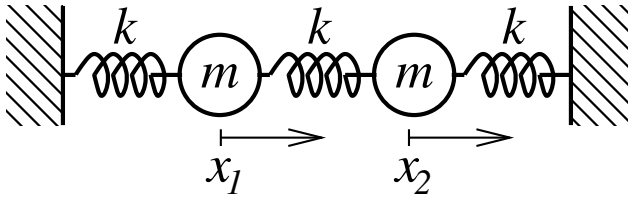


Figura 10: Dos osciladores de masa m conectados entre sí y a puntos fijos mediante muelles de constante k.

minaremos ahora con un poco más de detalle en busca de una comprensión más profunda.

Partimos de un sistema de dos osciladores amarrados a puntos fijos y conectados entre ellos (figura 10). Tenemos las ecuaciones del movimiento,

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1),$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2,$$

que, definiendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\ddot{x}_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2,$$
$$\ddot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2.$$

Ejercicio 43 [Respuesta: página 115] El centro de masas del sistema tiene por coordenada

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Definiremos también la coordenada η como la separación entre las dos masas.

$$\eta = x_2 - x_1.$$

Demuestra que el cambio de variables de x_1, x_2 a las coordenadas ξ y η convierte el sistema de ecuaciones diferenciales lineales anterior en

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi,$$
$$\ddot{\eta} = -3\omega_0^2 \eta.$$

Dicho de otro modo, el centro de masas ξ y la separación entre partículas η se comportan como osciladores armónicos simples e independientes entre

sí. Las otras soluciones se pueden expresar como combinaciones lineales de estos dos movimientos.

En el caso general de N osciladores, podemos escribir las ecuaciones del movimiento,

$$m\ddot{x}_n = -2kx_n + kx_{n-1} + kx_{n+1},$$

en forma matricial como si fueran las de un oscilador armónico

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

con $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$, $\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{x}_1,\ \ddot{x}_2,\ \ldots,\ \ddot{x}_N)$, y

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Aquí $\mathbf{K}$ corresponde a un sistema con los extremos unidos por muelles a puntos fijos, pero no es difícil cambiarlas a condiciones libres o periódicas, como en el ejercicio 39.

Ejercicio 44 [Respuesta: página 115] Comprueba que, si $\mathbf{x}(t)$ representa un modo normal de frecuencia ω, entonces satisface la ecuación

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = m\omega^2\hat{\mathbf{x}},$$

es decir, al multiplicar el vector $\hat{\mathbf{x}}$ por la matrix $\mathbf{K}$, obtenemos un vector proporcional a $\hat{\mathbf{x}}$, siendo la constante de proporcionalidad $m\omega^2$. Muestra la equivalencia entre la ecuación anterior y

$$(\mathbf{K} - m\omega^2\mathbf{I})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

donde $\mathbf{I}$ representa la matriz identidad. Esta ecuación tiene soluciones diferentes de la trivial $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ solo cuando $\det(\mathbf{K} - m\omega^2\mathbf{I}) = 0$.

En terminología de álgebra lineal, los modos normales son *autovectores* del operador lineal $\mathbf{K}$ multiplicados por el factor $e^{-\mathrm{i}\omega t}$, con *autovalores* iguales a la masa por su frecuencia angular al cuadrado.

Recapitulando, la cadena de osciladores acoplados satisface un sistema de ecuaciones diferenciales que podemos escribir como un movimiento armónico

generalizado, $m\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Para encontrar las soluciones, buscamos los autovalores $m\omega^2$ de $\mathbf{K}$ resolviendo la ecuación $\det(\mathbf{K} - m\omega^2\mathbf{I}) = 0$. Una vez conocidas las frecuencias de los modos normales, las sustituimos en la ecuación $(\mathbf{K} - m\omega^2\mathbf{I})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ para determinar los modos normales. Finalmente, utilizamos las condiciones iniciales para escribir la solución como una superposición de modos normales.

Ejercicio 45 [Respuesta: página 116] Resuelve de nuevo los problemas 37, 38 y 41 para una cadena de tres masas, pero esta vez con los extremos sujetos mediante muelles a puntos fijos.

Forzar y amortiguar

Hemos resuelto el problema general de las vibraciones naturales de un conjunto de osciladores acoplados, pero ¿qué ocurre si agitamos esta estructura con una frecuencia dada ω_F? De hecho, nada impide que agitemos cada oscilador con una frecuencia diferente. ¿Qué ocurrirá entonces?

Las ecuaciones del movimiento, escritas en forma matricial serían

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F},$$

donde $\mathbf{F}$ representaría un vector de forzantes,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 e^{-\mathrm{i}\omega_{F1}t} \\ F_2 e^{-\mathrm{i}\omega_{F2}t} \\ \vdots \\ F_N e^{-\mathrm{i}\omega_{FN}t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 46 [Respuesta: página 117] Para empezar, consideremos una forzante en la que todas las componentes son nulas excepto una. Por simplicidad, escogemos la primera: $\mathbf{F} = \left(F_1 e^{-\mathrm{i}\omega_{F1}t},\ 0,\ \ldots,\ 0\right)$, con $F_1 \neq 0$. Demuestra que, mientras que la frecuencia ω_{F1} sea diferente de todas las frecuencias de los modos normales, este sistema de ecuaciones lineales tiene por solución $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_P(t)$, donde $\mathbf{x}_H(t)$ representa cualquier solución de la ecuación homogénea, de modo que $m\ddot{\mathbf{x}}_H + \mathbf{K}\mathbf{x}_H = \mathbf{0}$, y $\mathbf{x}_P(t)$ es la solución estacionaria, $\mathbf{x}_P(t) = \left(\mathbf{K} - m\omega_{F1}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F}$.

Ejercicio 47 [Respuesta: página 118] Escribe la solución estacionaria si

la forzante tiene la forma

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 e^{-\mathrm{i}\omega_{F1}t} \\ F_2 e^{-\mathrm{i}\omega_{F2}t} \\ \vdots \\ F_N e^{-\mathrm{i}\omega_{FN}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 e^{-\mathrm{i}\omega_{F1}t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 e^{-\mathrm{i}\omega_{F2}t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ F_N e^{-\mathrm{i}\omega_{FN}t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 48 [Respuesta: página 118] Cuando la frecuencia forzante iguale a una de las de los modos normales, el sistema habitualmente no tendrá solución, lo cual implica que no existe solución estacionaria. Sin embargo, hay valores muy concretos de la forzante para los que sí existe solución. Demuestra que si forzamos el sistema del ejercicio 45 con frecuencia $\omega_F = \omega_0\sqrt{2}$, entonces tiene solución estacionaria $\mathbf{x}_P(t) = \hat{\mathbf{x}}e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ si

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega_F t},$$

pero no si

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Si añadimos el efecto del rozamiento a la ecuación diferencial, la convertimos en

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}.$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales, primero tenemos que encontrar la solución de la ecuación homogénea asociada.

Ejercicio 49 [Respuesta: página 119] Si no se fuerza, el sistema anterior se reduce a

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Demuestra que entonces las frecuencias normales tienen la forma

$$\omega_j = \frac{\mathrm{i}\gamma}{2m} + \sqrt{\frac{\lambda_j}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2},$$

donde λ_j representa un autovalor de la matriz $\mathbf{K}$.

Ejercicio 50 [Respuesta: página 120] Demuestra que cuando $\gamma > 0$ y

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$$

(siendo $\hat{\mathbf{F}}$ un vector constante arbitrario), las ecuaciones diferenciales para el sistema de osciladores acoplados forzados y amortiguados siempre tienen solución estacionaria igual a

$$\mathbf{x}_P(t) = (\mathbf{K} - (m\omega_F^2 + \mathrm{i}\omega_F\gamma)\mathbf{I})^{-1}\hat{\mathbf{F}}e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Ondas

Ondas de presión y de cizalla

Si en una de nuestras cadenas de osciladores empujamos la masa de un extremo, esta empujará a la siguiente, que empujará a la siguiente, y así sucesivamente, de modo que la perturbación se propagará a lo largo de la cadena, aunque las masas permanezcan atrás, oscilando en torno a su punto de equilibrio. Se puede pensar en una onda de presión como la versión continua del mismo fenómeno.

Empezamos por cambiar la notación. Si entre las masas de la cadena hay una separación de h, entonces escribimos $x_j(t)$ como $\phi(jh,\ t)$. Por tanto, la función $\phi(x,\ t)$ representa el desplazamiento de la cadena en el punto x al tiempo t. Sea la masa total de la cadena M, el número de masas N y la longitud de la cadena L. Entonces $m = M/N$ y $h = L/(N-1)$ (si tengo cinco masas, habrá cuatro separaciones entre ellas, de ahí que use $N-1$ en lugar de N). Al hacer tender el número de masas N a infinito manteniendo constantes M y L, obtenemos una barra elástica continua con un desplazamiento para cada punto $x \in [0,\ L]$, que representamos con $\phi(x,\ t)$. La barra se puede extender o comprimir en diferentes puntos, pero supondremos que ϕ es una función analítica de x.

Ejercicio 51 [Respuesta: página 120] Demuestra que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h,t) + \phi(x-h,t) - 2\phi(x,t)}{h^2}.$$

Para hacerlo, desarrolla en serie de Taylor $\phi(x+h,t)$ y $\phi(x-h,t)$, suma ambas series y despeja la segunda derivada de ϕ respecto de x.

Ejercicio 52 [Respuesta: página 121] Pongamos que queremos diseñar una cadena de N osciladores sujeta por un extremo ($x_0 = 0$) que oponga la misma fuerza al estiramiento del extremo opuesto que un muelle de constante K. ¿Qué constante debemos escoger para cada uno de los muelles?

La ecuación del movimiento para las masas

$$m\ddot{x}_n = -2kx_n + kx_{n-1} + kx_{n+1},$$

reescrita en términos de $\phi(x,t)$ se convierte en

$$m\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = k(\phi(x+h,t) + \phi(x-h,t) - 2\phi(x,t)).$$

Para mantener la masa y la elasticidad de la cadena independiente del número de osciladores, escogemos $m = M/N$ y $k = NK$ (ejercicio 47). Además, $N = L/h+1$, pero como el número de masas va a tender a infinito, podemos escribir directamente $N = L/h$.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\phi(x+h,t) + \phi(x-h,t) - 2\phi(x,t)}{h^2}.$$

Tomando el límite $h \to 0$ (equivalente a $N \to \infty$) y usando el resultado del ejercicio 46,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},$$

una ecuación de ondas con velocidad $c = \sqrt{KL/\rho}$, donde $\rho = M/L$ es la densidad lineal del material. Una consecuencia interesante de este análisis: podemos medir la velocidad del sonido en un material usando su longitud, densidad y cuánto se estira para una fuerza dada.

Por segunda vez, nos hemos encontrado con la ecuación de ondas. La primera vez, apareció en el capítulo anterior cuando describimos las ondas transversales en una cuerda tensa. Ahora vemos que la misma ecuación se aplica a ondas longitudinales. ¿Qué hay de las ondas de cizalla? Nada impide repetir la derivación anterior interpretando los valores de $\phi(x,t) = y(x,t)$ como desplazamientos perpendiculares al eje x, teniendo en cuenta que la constante de muelle para desplazamientos transversales no tiene por qué ser la misma que en el caso anterior, así que las ondas transversales pueden propagarse a una velocidad diferente de la de las longitudinales.

De todas formas, adoptaremos una derivación alternativa, que resultará útil más adelante. Empezamos imaginando un grueso tomo de antigua enciclopedia sobre una mesa. Si nos apoyamos sobre ella y hacemos fuerza perpendicular al lomo, pero paralela a la mesa, el tomo responde con una fuerza en sentido opuesto que tiende a restaurar su forma. Si producimos una deformación ϕ esta fuerza será

$$F = -A\mu\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

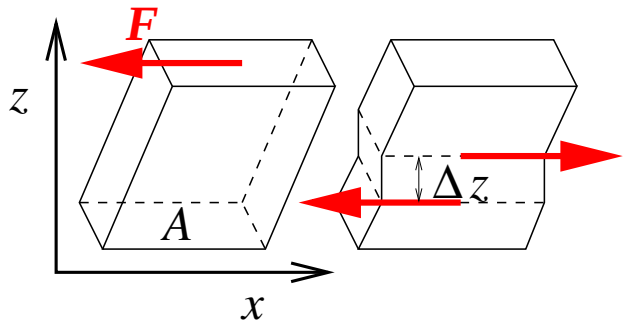


Figura 11: Si deformamos un material elástico desplazando lateralmente la superficie de arriba, responderá con una fuerza proporcional a su área y a la pendiente del desplazamiento respecto de la altura $F = -A\mu\frac{\partial\phi}{\partial z}$. Sin embargo, una lámina intermedia de anchura Δz sentirá fuerzas debidas a las deformaciones del material por encima y por debajo.

A representa el área de la portada y ϕ la deformación en la dirección x a la altura z. Se llama a μ el *módulo de elasticidad transversal* o de *cizalladura* (figura 11).

Si nos fijamos en un bloque de páginas intermedias de anchura Δz, las páginas que hay por encima ejercerán una fuerza en un sentido, mientras que las que quedan por debajo harán una fuerza en el sentido opuesto, de modo que la fuerza total sobre el bloque de páginas será

$$F = A\mu\left(\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=z_0+\Delta z} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=z_0}\right).$$

La segunda ley de Newton nos dice que la fuerza sobre este bloque será igual a su masa por la aceleración resultante. Podemos escribir la masa como la densidad ρ de las páginas por su área A por la altura del bloque Δz.

$$F = \rho A\Delta z\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

Igualando las dos expresiones para la fuerza, dividiendo por $A\Delta z$ y tomando el límite cuando $\Delta z \to 0$, obtenemos una ecuación de ondas de velocidad $c = \sqrt{\mu/\rho}$ que se propagan verticalmente.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Ondas estacionarias y armónicos

Cuando estudiamos las cadenas de osciladores, vimos que admitían modos de vibración (normales) en las que todas las masas se movían con la misma frecuencia, pero solo para algunos valores muy precisos de las frecuencias. La ecuación de ondas, por el contrario, parecía admitir soluciones con cualquier valor de la frecuencia, siempre que se cumpliera la relación de dispersión. En el segundo capítulo, no hicimos suposición alguna sobre la longitud de la cuerda. De acuerdo con nuestro formalismo, podría extenderse indefinidamente a lo largo del eje x. Sin embargo, en cuanto le asignamos una longitud finita y especificamos condiciones sobre los extremos, nos vemos obligados a descartar muchas frecuencias y a quedarnos con un conjunto muy concreto.

Ejercicio 53 [Respuesta: página 121] Comprueba que una cuerda tensa con los extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, que cumpla la ecuación de ondas, acepta soluciones de la forma

$$y(x,t) = A\ \sin(\omega t)\ \sin(kx).$$

solo para ciertos valores de la frecuencia ω y del número de ondas k. Determina cuáles. A representa cualquier número real.

Ejercicio 54 [Respuesta: página 122] Aprendimos en el segundo capítulo que la ecuación de ondas admite soluciones de la forma

$$y(x,t) = e^{-\mathrm{i}(\omega t \pm kx)}.$$

Demuestra que la solución del ejercicio anterior se puede escribir como la superposición de dos ondas sinusoidales que viajan en sentidos opuestos.

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{A}{2}e^{-\mathrm{i}(\omega t - kx)} - \frac{A}{2}e^{-\mathrm{i}(\omega t + kx)}\right).$$

Ejercicio 55 [Respuesta: página 123] Hay dos pistas que indican que hay otras soluciones, además de las que vimos en el ejercicio 53. Primero, ahí siempre ocurre que cuando $t = 0$ la cuerda está pasando por el eje x: $y(x,0) = 0$, pero podríamos haber elegido poner el cronómetro a cero en cualquier otro momento de la vibración. Segundo, en el ejercicio 54 supusimos que A es un número real, pero no hay por qué limitarse a esta posibilidad. Comprueba que

$$y(x,t) = B\ \cos(\omega t)\ \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$$

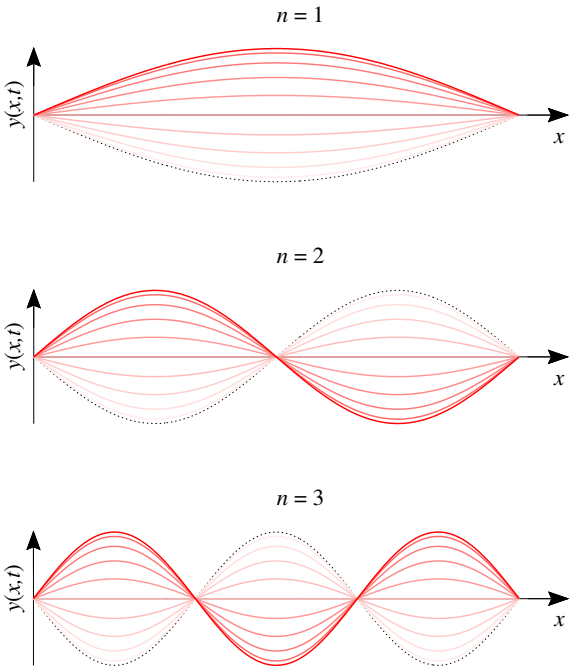


Figura 12: Los tres primeros armónicos de una cuerda vibrante sujeta por los extremos.

también satisface la ecuación de ondas con las mismas condiciones en los extremos. Comprueba que aparecen términos con $\cos(\omega t)$ si partimos de la expresión en el ejercicio 54 pero sustituimos A por $A + \mathrm{i}B$.

En el ejercicio 53 demostramos que la función $y(x,t)$ describe el movimiento de la cuerda cuando $k = \pi n/L$. Se llama *armónicos* a las soluciones de esta forma. La figura 12 dibuja los tres primeros armónicos ($n = 1$, 2 y 3). Otras vibraciones se pueden expresar como superposición de armónicos:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \sin\left(cn\pi\frac{t}{L}\right).$$

Los coeficientes A_n indican la contribución de cada armónico. El sonido característico de una guitarra o un violín depende de la mezcla particular de armónicos determinada por los valores A_n.

Recordemos que, en las cadenas de osciladores, al cambiar las condiciones en los extremos cambiaban los modos normales. Lo mismo ocurre con

fenómenos descritos por la ecuación de ondas. Por ejemplo, el sonido de una flauta proviene de las vibraciones del aire que resuena en su interior.

Ejercicio 56 [Respuesta: página 124] Simplificando, trataremos una flauta como un tubo de longitud L sobre el eje x. Las ondas de presión entre los extremos $x = 0$ y $x = L$ satisfacen la ecuación de ondas.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

Ahora bien, la onda no se anula en los extremos. Al contrario, el aire puede entrar y salir libremente y, en consecuencia, no puede acumularse en estos puntos. Esto quiere decir que la derivada de los desplazamientos $\phi(x, t)$ se anula en $x = 0$ y $x = L$.

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

De otro modo, se producirían gradientes de densidad. Resuelve la ecuación de ondas con estas condiciones de contorno.

Capa límite de Stokes

Extendamos el ámbito de aplicación de los fasores más allá de la vibración de sólidos y consideremos ondas que se propagan en el seno de líquidos o gases. Para describir el comportamiento de un fluido, utilizamos un campo de velocidades que depende de la posición y del tiempo, en lugar de un campo de deformaciones. Por tener una imagen concreta, supongamos que vibra lateralmente el fondo del estanque que rodea a una de las fuentes de Versailles, a consecuencia del ruido que producen las explosiones de unos fuegos de artificio. Llamemos $v(z, t)$ a la velocidad en la dirección x a la altura z y en el tiempo t.

Si intentamos arrastrar la superficie del agua (empujando una balsa, por ejemplo), el fluido opone una resistencia debido a la fricción entre láminas de fluido

$$F = -A\eta \frac{\partial v}{\partial z},$$

donde A sería el área cubierta por la balsa y η la *viscosidad dinámica*.

Ejercicio 57 [Respuesta: página 124] Deriva la ecuación diferencial que describe la velocidad del agua v en función de su distancia al fondo z y el

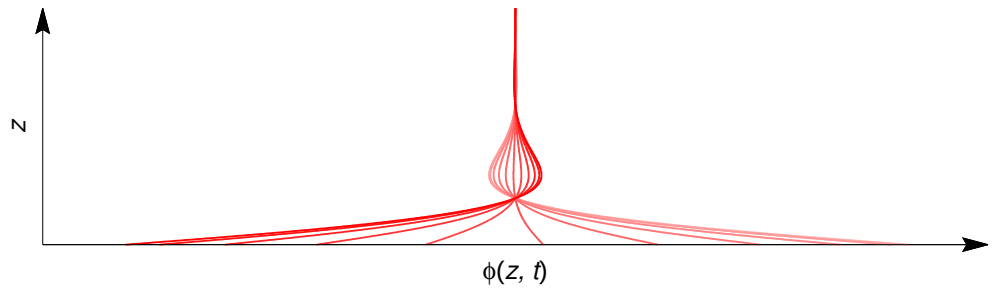


Figura 13: Desplazamiento lateral ϕ del agua en un estanque a consecuencia de la vibración lateral del fondo.

tiempo t:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Esta ecuación es válida para pequeñas vibraciones, cuando no sean importantes la convección ni la turbulencia.

Ejercicio 58 [Respuesta: página 125] Utiliza el método de separación de variables para encontrar soluciones de la ecuación diferencial del ejercicio 57.

Ejercicio 59 [Respuesta: página 126] Partiendo de la solución hallada en el ejercicio anterior, supón que en nuestro estanque se mueve el agua de manera que

$$v(z, 0) = E \ \sin(\kappa z).$$

Determina cómo evoluciona la velocidad.

Ejercicio 60 [Respuesta: página 126] Encuentra el estado estacionario de la misma ecuación cuando el fondo del estanque vibra con frecuencia ω_F. Esta solución se conoce con el nombre de *capa límite de Stokes*, porque representa una vibración apreciable solo en las cercanías de la superficie (figura 13). Supón que el agua está en reposo lejos del fondo.

Ondas electromagnéticas

Además de ayudarnos con los cálculos en mecánica de sólidos y fluidos, los fasores resultan muy útiles también en electromagnetismo. En ese campo,

los fenómenos se describen por medio de las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0},\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Las primeras dos ecuaciones dicen que las fuentes del campo eléctrico son las cargas, y que el campo magnético no tiene fuentes. La cuarta ecuación dice que hay campos magnéticos rodeando las corrientes y los puntos en que el campo eléctrico varía con el tiempo. Por último, la tercera ecuación afirma que hay campo eléctrico alrededor de los puntos en los que varía el campo magnético.

En el espacio vacío, en ausencia de cargas ($\rho = 0$) y de corrientes ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$), las ecuaciones anteriores se convierten en

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0,\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Ejercicio 61 [Respuesta: página 127] Utiliza las ecuaciones de Maxwell junto con la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

para demostrar que tanto el campo eléctrico como el magnético cumplen la versión tridimensional de la ecuación de ondas en el espacio vacío

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{A}.$$

$\nabla^2 \mathbf{A}$ representa

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2},$$

así que, si el campo $\mathbf{A}$ depende solo de la coordenada x, la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2},$$

por lo que se pueden aplicar las técnicas que hemos aprendido a los campos eléctrico y magnético.

La ecuación de Schrödinger

Para cerrar el capítulo, nos enfrentaremos a la fórmula fundamental de la mecánica cuántica: la ecuación de Schrödinger. En una dimensión, la ecuación para la función de onda Ψ se escribe

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

$V(x)$ representa la energía potencial del electrón como función de la posición x, m es la masa del electrón, $\hbar$ es la constante de Planck dividida entre 2π y la función de onda $\Psi(x,t)$ se utiliza para calcular la densidad de probabilidad $P(x,t)$ de encontrar al electrón en la coordenada x en el tiempo t con la relación $P(x,t) = \overline{\Psi(x,t)}\Psi(x,t)$. Por primera vez, aparece el número imaginario **i** directamente en la ley física, ligando estrechamente la mecánica cuántica a los números complejos.

Ejercicio 62 [Respuesta: página 128] Utilizando el método de separación de variables, encuentra soluciones para la ecuación de Schrödinger en el espacio vacío (cuando $V(x) = 0$).

Evidentemente, en estos últimos apartados no pretendo enseñar electromagnetismo ni cuántica, sino mostrar que en estos campos también se pueden aplicar los fasores y por qué.

Una brevísima introducción a las series de Fourier

Expresar las condiciones iniciales como suma de fasores

Al resolver ecuaciones diferenciales lineales, nos fijamos primero en la ecuación homogénea asociada. Ahí hemos estado aplicando la estrategia de sustituir soluciones en forma de fasores en busca de las frecuencias naturales de vibración del sistema. Si nos preguntan cómo evoluciona el sistema a partir de unas condiciones iniciales dadas, entonces las expresamos en función de los fasores calculados en el primer paso. Así hemos operado hasta ahora, pero podríamos preguntarnos si siempre será posible escribir las condiciones iniciales en estos términos.

Ejercicio 63 [Respuesta: página 129] Sea el fasor $x(t) = x_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$, cuya parte real representa un movimiento oscilatorio. Demuestra que siempre existe una elección de la constante compleja x_0 tal que las condiciones iniciales son $\mathrm{Re}(x(0)) = a$ y $\mathrm{Re}(\dot{x}(0)) = b$, sean cuales sean los números reales a y b.

Ejercicio 64 [Respuesta: página 129] El problema se complica para las cadenas de osciladores, porque la condición inicial viene dada por dos vectores arbitrarios: uno especifica las posiciones de las masas y otro sus velocidades. La primera pregunta a la que debemos responder, entonces, es si los vectores que representan los modos normales forman una base del espacio vectorial, de modo que pueden expresar cualquier vector mediante combinación lineal. Comprueba que los vectores de los modos normales de los ejercicios 38 y 45 son linealmente independientes y, por tanto, forman una base.

Ejercicio 65 [Respuesta: página 130] Suponiendo que los modos normales efectivamente formen una base, ¿se puede expresar cualquier condición

inicial (posiciones y velocidades) de la cadena de osciladores a partir de estos modos?

Producto escalar

Las bases del ejercicio 64 tienen además la propiedad de estar formados por vectores perpendiculares. La manera habitual de comprobarlo es ver que su producto escalar es nulo. En adelante, utilizaremos una definición del producto escalar que permite generalizarlo a vectores cuyas componentes son números complejos. Si tenemos dos vectores $\mathbf{u} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N)$ e $\mathbf{v} = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_N)$, su producto escalar se define

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \ldots & \bar{x}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \ldots + \bar{x}_N y_N.$$

Como se puede ver, el signo de daga(†) indica transponer y conjugar los elementos de un vector (o matriz). Definido así, sabemos que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ siempre será un número real no negativo, ya que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_N|^2 \geq 0.$$

Podemos, por tanto, definir la *norma* o módulo de un vector como $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. A partir de la definición, es trivial comprobar que se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$.
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.
3. Si λ representa un número complejo arbitrario, $\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
4. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$.

Ejercicio 66 [Respuesta: página 131] Comprueba que las bases del ejercicio 64 efectivamente están formadas por vectores perpendiculares.

Ejercicio 67 [Respuesta: página 131] Demuestra:

- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

- Si λ representa un número complejo arbitrario, $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- $\|\mathbf{v}\| = 0$ solo cuando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejercicio 68 [Respuesta: página 132] Demuestra que, si $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica cualquiera ($\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$) cuyos elementos son todos reales, entonces $\langle \mathbf{Ku}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{Kv} \rangle$.

Ejercicio 69 [Respuesta: página 132] Demuestra que en la matriz $\mathbf{K}$ anterior, los autovalores son necesariamente reales y los autovectores correspondientes a autovalores diferentes son perpendiculares entre sí.

Ejercicio 70 [Respuesta: página 132] El sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{pmatrix} m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ m_N \ddot{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

que describe el movimiento de osciladores armónicos acoplados se puede siempre convertir en un sistema de la forma $\ddot{\mathbf{x}}' = -\mathbf{K}'\mathbf{x}'$ (donde $\mathbf{K}'$ representa una matriz real simétrica) mediante el cambio de variables $x'_n = \sqrt{m} x_n$. Compruébalo.

Hemos demostrado que cualquier sistema de osciladores armónicos acoplados equivale a uno en el que todas las masas son iguales a uno, así que nos centraremos en ecuaciones de la forma $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{Kx}$. Sabemos que las frecuencias de los modos normales se calculan a partir de los autovalores de $\mathbf{K}$, que son las soluciones de la ecuación característica $|\mathbf{K} - \lambda I| = 0$. El teorema fundamental del álgebra garantiza que existen exactamente N raíces (en general complejas, pero como $\mathbf{K}$ es real y simétrica, estas raíces tienen que ser reales). Además, los autovectores que tienen autovalores diferentes son perpendiculares entre sí. Esto quiere decir que los modos normales forman una base que permite expresar cualquier condición inicial.

Hay un caso especial que escapa a nuestra demostración: cuando hay raíces múltiples de la ecuación característica. También se puede demostrar que por cada raíz de multiplicidad d se pueden escoger d autovectores perpendiculares entre sí para ese autovalor. No nos entretendremos en demostrarlo porque aquí no tendremos que enfrentarnos a ese problema.

Cualquier vector $\hat{\mathbf{x}}$ (condición inicial) se puede expresar en términos de la base de vectores $\mathbf{v}_n$ (modos normales).

$$\hat{\mathbf{x}} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_N\mathbf{v}_N.$$

Si tenemos el vector $\hat{\mathbf{x}}$ y los $\mathbf{v}_n$, hay un truco para hallar la expresión de los coeficientes a_n. Pongamos que queremos el coeficiente a_m, multiplicamos escalarmente la ecuación anterior por $\mathbf{v}_m$.

$$\langle \mathbf{v}_m, \hat{\mathbf{x}} \rangle = a_1\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1 \rangle + a_2\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_2 \rangle + \ldots + a_N\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_N \rangle,$$

pero todos los productos escalares de la derecha $\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n \rangle$ son nulos excepto aquel en el que $m = n$.

$$\langle \mathbf{v}_m, \hat{\mathbf{x}} \rangle = a_m\langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m \rangle.$$

Despejando a_m,

$$a_m = \frac{\langle \mathbf{v}_m, \hat{\mathbf{x}} \rangle}{\|v_m\|^2}.$$

Espacios lineales de funciones

Nos encontramos de nuevo cara a cara con el misterio que nos ha preocupado en capítulos anteriores. Así surge el problema: queremos resolver la ecuación de ondas o del calor dadas unas condiciones iniciales. Habiendo considerado la ecuación homogénea, conocemos la forma de las funciones que satisfacen la ecuación diferencial y ahora solo hay que encontrar una combinación lineal de ellas que exprese las condiciones iniciales. Sin embargo, las funciones solución son todas continuas, periódicas y derivables tantas veces como se quiera, pero las condiciones iniciales no tienen por qué compartir estas propiedades. ¿Se puede, a pesar de las diferencias, expresar esta función como suma de aquellas? A primera vista, parece imposible escribir funciones con picos no derivables o discontinuidades como suma de funciones suaves.

En el apartado anterior, vimos que para las cadenas de osciladores hay soluciones normales (en las que todas las masas vibran con la misma frecuencia) que forman una base del espacio. Cualquier condición inicial se puede escribir como suma de estos modos normales. Ahora queremos aplicar la misma idea a los espacios de funciones.

Recordemos que representamos el estado de la cadena mediante un vector en el que cada componente indica el desplazamiento de una de las masas. En el límite continuo, podemos imaginar que la función f es un vector de infinitas componentes y que $f(x)$ representa el desplazamiento del punto que se encontraba inicialmente en x.

Otra forma de imaginar la transición de funciones a vectores consiste en entender los vectores como un tipo especial de funciones. El vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$, por ejemplo, puede representar la función $v(x)$ definida solo sobre los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$, de modo que $v(1) = v_1 = -1$, $v(2) = v_2 = 1$ y $v(3) = v_3 = 0$. Los espacios de funciones contienen funciones definidas sobre conjuntos más generales, como la recta real o el intervalo $[0, 1]$.

Lo importante es que hay conjuntos de funciones que cumplen las mismas propiedades que los vectores en cuanto a la suma de sus elementos y el producto por un escalar y, por tanto, los teoremas derivados de estas propiedades se aplican también a estos conjuntos, que llamaremos *espacios lineales*.

Al igual que en el caso de los osciladores lineales, lo ideal sería que las los modos normales formaran una base del espacio lineal. Puestos a pedir, que fueran también perpendiculares entre sí en algún sentido, para aplicar el truco que aprendimos al final del apartado anterior. Evidentemente, tendríamos que definir entonces algún tipo de producto de escalar entre funciones.

Ejercicio 71 [Respuesta: página 133] Definimos el producto escalar entre las funciones f y g como

$$\langle f, g\rangle = \int \overline{f(x)} g(x)\ dx.$$

Comprueba que esta definición cumple las cuatro propiedades del producto escalar del apartado anterior.

Series de Fourier

No intentaré explicar aquí las sutilezas involucradas en esta definición del producto escalar. Me interesa la idea básica y cómo se aplica al cálculo de series de Fourier. Me limitaré a decir que restringiremos nuestro interés a espacios de funciones de cuadrado integrable, llamados L^2, formados por funciones cuya norma no es infinita, es decir, que no diverge la integral en

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int |f(x)|^2\ dx}.$$

Esta condición se suele escribir así: $\|f\| < \infty$.

Por poner un ejemplo concreto, partimos de la ecuación para una cuerda vibrante,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

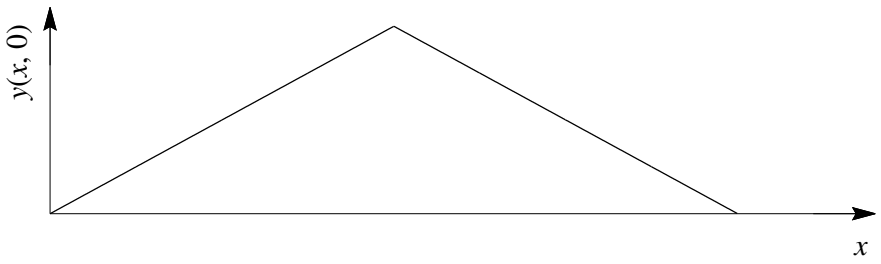


Figura 14: Condición inicial para una cuerda tensa en la que se ha tirado hacia arriba del punto central.

con las condiciones de contorno $y(0,t) = y(L,t) = 0$. Si tiramos hacia arriba del punto central hasta que $y(L/2, 0) = h$, la cuerda tomará inicialmente la forma de una cuña no derivable en $x = 0$ (figura 14),

$$y(x,0) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ 2h - \frac{2h}{L}x, & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Las funciones de la forma

$$y_n(x,t) = e^{-\mathrm{i}c\frac{n\pi}{L}t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(siendo n un número entero) cumplen la ecuación de ondas, además de las condiciones en los extremos $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

En efecto, solo hay que sustituir $x = 0$ en $y_n(x,t)$ para ver que se cumple la condición $y_n(0,t) = 0$.

$$y_n(0,t) = e^{-\mathrm{i}c\frac{n\pi}{L}t} \sin(0) = 0.$$

Si ahora sustituimos $x = L$ en $y(x,t)$,

$$y_n(0,t) = e^{-\mathrm{i}c\frac{n\pi}{L}t} \sin(n\pi) = 0.$$

Ejercicio 72 [Respuesta: página 134] Nuestro objetivo consiste en expresar la condición $y(x,0)$ como una combinación lineal de las funciones $y_n(x,0)$. En nuestro problema, la función $y(x,t)$ toma valores en el intervalo $[0,L]$, así que la integral del producto escalar se extiende sobre este mismo intervalo. Comprueba que $\|y_n(x,0)\| = \sqrt{L/2}$.

Ejercicio 73 [Respuesta: página 135] Comprueba que

$$\langle y_n(x,0), y_m(x,0)\rangle = 0$$

cuando $n \neq m$.

Es decir, las funciones y_n forman una conjunto *ortogonal*, análogo a nuestras bases de vectores perpendiculares. En este problema, las funciones ortogonales son senos,

$$y_n(x,0) = \left(e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}\right) = 2\mathrm{i}\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

por lo que quizás podamos expresar $y(x,0)$ de la siguiente manera:

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ 2\mathrm{i}\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

La solución del problema de la cuerda vibrante con extremos fijos y condición inicial $y(x,0)$ sería entonces

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ 2\mathrm{i}\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ e^{-\mathrm{i}c\frac{n\pi}{L}t}.$$

Sin embargo, para poder llamar *base* a este conjunto de senos del espacio L^2 definido en el intervalo $[0, L]$, tendríamos que demostrar que *cualquier* función f de L^2 se puede expresar como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x,0),$$

para alguna elección de coeficientes complejos a_n. Aunque la fórmula es válida en cierto sentido, entender correctamente los detalles nos llevaría a una excursión por el análisis funcional y los espacios de Hilbert.

Para la mayoría de aplicaciones prácticas, nos conformamos con una buena aproximación a la función f, y escogemos algún número N tal que

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n y_n(x,0).$$

Ejercicio 74 [Respuesta: página 135] Utiliza el truco que explicamos al final de la sección de producto escalar para calcular los coeficientes a_n en el problema de la cuerda tensa que nos ocupa.

$$y(x,0) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n y_n(x,0).$$

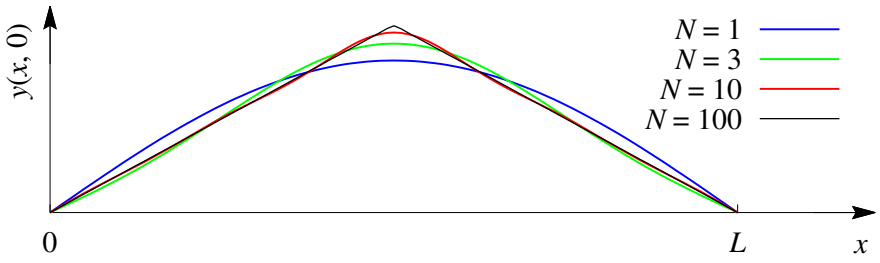


Figura 15: Condición inicial de la cuerda expresada como la suma $y(x,0) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n y_n(x,0)$ para diferentes valores de N.

Cuanto mayor sea el valor de N, más se aproximará la suma de términos a la condición inicial $y(x,0)$ (figura 15).

La parte espacial de la solución de la ecuación de ondas se puede expresar en términos de exponenciales, así que ¿por qué no resolver el problema de las condiciones iniciales con exponenciales? Para simplificar los cálculos, desplazamos nuestra cuerda hacia la izquierda, dejando el centro en $x = 0$. Las condiciones iniciales se convierten en

$$y(x,0) = \begin{cases} h + \frac{2h}{L}x, & -\frac{L}{2} \leq x < 0, \\ h - \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Ejercicio 75 [Respuesta: página 137] Demuestra que en el intervalo $[-L/2, L/2]$

$$\left\langle e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}, e^{-\mathrm{i}\frac{2m\pi}{L}x} \right\rangle = 0$$

cuando $n \neq m$, y que

$$\left\| e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x} \right\| = \sqrt{L}.$$

Ejercicio 76 [Respuesta: página 137] Calcula los coeficientes c_n de la suma

$$y(x,0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x},$$

para la condición inicial de la cuerda $y(x,0)$ en el intervalo $[-L/2, L/2]$.

Aunque es verdad, no demostramos aquí que la suma converge a $y(x,0)$

cuando N tiende a infinito.

$$y(x,0) = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}, y(x,0)\right\rangle e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}.$$

Se llama a la expresión de la derecha *desarrollo en serie de Fourier de exponenciales* de la función $y(x,0)$. En el caso que nos ocupa,

$$y(x,0) = \frac{1}{L}\sum_{n \text{ impar}} \frac{2h}{n^2\pi^2} e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}.$$

Ondas con disipación

El trabajo del apartado anterior sugiere que el movimiento de la cuerda lo describe la ecuación

$$y(x,0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x} e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi c}{L}t},$$

con los coeficientes c_n calculados en el ejercicio 76. Ahora bien, si representamos este movimiento, obtenemos un resultado poco realista, con la forma de la cuerda compuesta por líneas rectas en todo momento, en lugar de las curvas suaves que observamos en el mundo real (figura 16). Naturalmente, podemos mejorar nuestro modelo teniendo en cuenta la disipación de la energía que acaba llevando a la cuerda a detenerse. La ecuación de ondas modificada se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Al aplicar el método de separación de variables, vemos que la ecuación para la parte espacial no se modifica y que la parte temporal se convierte en la de un movimiento armónico amortiguado, que ya sabemos resolver.

Ejercicio 77 [Respuesta: página 138] Supón que $y(x,t) = Y(x)T(t)$. Comprueba que entonces la ecuación de ondas con disipación se convierte en estas dos:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{dT}{dt} - c^2k^2T = 0,$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} - k^2Y = 0.$$

Para que se satisfagan las condiciones de contorno, $k = 2\pi n/L$.

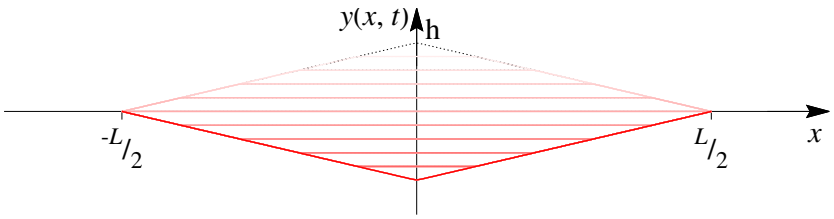


Figura 16: Vibración de la cuerda tensa a partir de las condiciones iniciales $y(x,0)$ del ejercicio 76, según la ecuación de ondas sin disipación de la energía.

Una vez resuelta la ecuación diferencial para T (como hicimos allá por el ejercicio 6) obtenemos una expresión para la forma de la cuerda en función del tiempo.

$$y(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\mathrm{i}kx} e^{-\frac{\gamma}{2\rho}t} e^{-\mathrm{i}\sqrt{c^2k^2-\frac{\gamma^2}{4\rho^2}}\ t},$$

suponiendo que no haya ningún valor de n para el que $c^2k^2 = \frac{\gamma^2}{4\rho^2}$ (porque entonces estaríamos en el caso del ejercicio 7). Al dibujar esta solución con $\gamma = 2$ en el intervalo $t \in [0,1{,}2]$, obtenemos las curvas de la figura 17.

Transformada de Fourier

Retomemos los problemas de cadenas de osciladores. Ya hemos aprendido a resolver la ecuación homogénea

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

para cualquier condición inicial, pero sólo sabemos resolver la ecuación forzada

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

cuando podemos expresar la forzante $\mathbf{F}(t)$ como una suma de varios fasores. Sin embargo, el apartado anterior nos ha enseñado que muchas funciones que en principio no parecen sumas de exponenciales se pueden desarrollar en serie de Fourier. Sea T el periodo de la función $\mathbf{F}$ y supongamos que es una función de cuadrado integrable en $[0,T]$, es decir,

$$\mathbf{F}(t+T) = \mathbf{F}(t),$$
$$\int_0^T \bar{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\ dt < \infty,$$

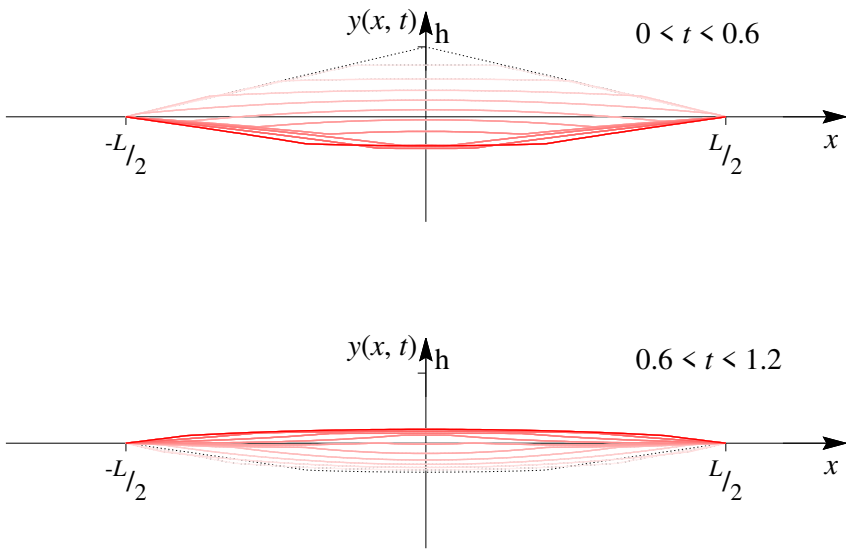


Figura 17: Partiendo de la forma inicial $y(x, 0)$ del del ejercicio 76, la ecuación de ondas amortiguada predice que la cuerda se va curvando al moverse. Aquí la vibración corresponde a un coeficiente $\gamma = 2$.

entonces podemos desarrollar $\mathbf{F}$ en serie de Fourier

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \, e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t},$$

con los coeficientes

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t} \, \mathbf{F}(t) \, dt.$$

En cierto sentido, la sucesión de valores $\mathbf{c}_n$ contiene la información necesaria para reconstruir $\mathbf{F}(t)$, por lo que se puede considerar una representación alternativa de la misma función en la que, en lugar de especificar el valor de $\mathbf{F}$ para cada tiempo, se indica cuánto contribuye cada armónico en la serie. Se llama *espectro* a la sucesión de valores $\mathbf{c}_n$.

Ejercicio 78 [Respuesta: página 139] Determina los coeficientes c_n para la siguiente función en diente de sierra:

$$F(t) = t - \lfloor t \rfloor,$$

donde $\lfloor t \rfloor$ significa el mayor entero menor que t, es decir, si $t = 3{,}71$, entonces $\lfloor t \rfloor = 3$, si $t = -2{,}15$, $\lfloor t \rfloor = -3$ (figura 18).

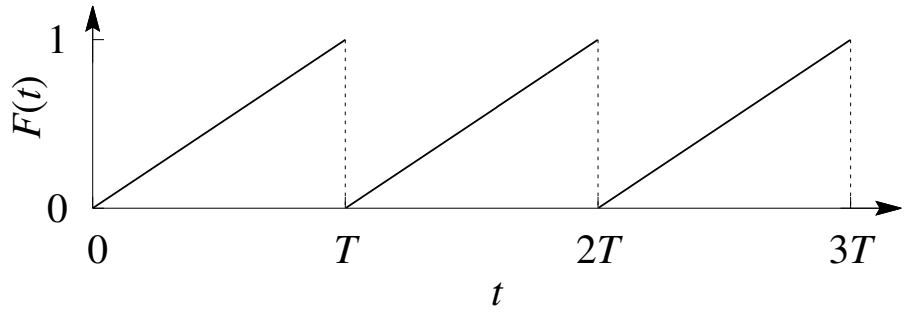


Figura 18: Forzante en forma de diente de sierra, $F(t) = t - \lfloor t \rfloor$.

Ejercicio 79 [Respuesta: página 140] Encuentra la solución estacionaria para un oscilador armónico amortiguado al que se le aplica la forzante del ejercicio anterior.

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = t - \lfloor t \rfloor.$$

Supón que T no es múltiplo del periodo natural del oscilador $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y que $\gamma > 0$.

Sorprendentemente, las series de Fourier sirven incluso para describir funciones discontinuas. Sin embargo, aunque en el ejercicio teníamos una función periódica, $F(t)$, en general las forzantes no tienen por qué ser cíclicas. ¿Hay alguna manera de tratar forzantes no periódicas? Todavía más sorprendentemente, ¡sí!, siempre que $F(t)$ sea una función de cuadrado integrable.

Definamos la variable $\nu = \frac{n}{T}$, de modo que $\Delta\nu = \frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T}$. Los coeficientes c_n de la serie de Fourier se convierten en

$$c_n = \Delta\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{i}\nu t}\ F(t)\ dt. = \Delta\nu \tilde{F}(\nu),$$

abreviando la integral como $\tilde{F}(\nu)$. La serie de Fourier se convierte en

$$F(t) = \sum_{\nu T = -\infty}^{\infty} \tilde{F}(\nu)\ e^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\ \Delta\nu,$$

Una función no periódica corresponde al límite en el que el periodo tiende a infinito, y esto convierte la suma anterior en una integral:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\nu)\ e^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\ d\nu.$$

De nuevo, los coeficientes $\tilde{F}(\nu)$ contienen toda la información necesaria para reconstruir la función $F(t)$, por lo que cabe interpretarlos como una representación alternativa de la misma función, pero en términos de las frecuencias ν. Se llama a $\tilde{F}$ la *transformada de Fourier* de F.

$$\tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{i} \nu t}\ F(t)\ dt.$$

Ejercicio 80 [Respuesta: página 141] Halla la transformada de Fourier de la función

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2}, \\ 1, & |t| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcula una solución particular para la ecuación

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = \mathrm{rect}(t),$$

expresada en términos de una integral sobre frecuencias.

Cerraré este capítulo con dos advertencias. Primero, en la definición de la transformada de Fourier, se suelen escoger los signos al revés que en este libro, es decir, el exponente en la transformada se escribe negativo, mientras que la expresión de $F(t)$ en términos de una integral incluye exponenciales de $+2\pi\mathrm{i}\nu t$. Otras definiciones se expresan en términos de frecuencias angulares y tienen factores de $1/\sqrt{2\pi}$ delante de las integrales. Escoger uno u otro convenio es cuestión de preferencia estética, pero sea cual sea tu elección, debes operar de manera consistente con ella.

Segundo, aunque ya avisé desde el título del capítulo, insisto en que las páginas precedentes no son más que una introducción. Al igual que no solemos utilizar la definición de derivada o integral para calcular derivades o integrales, sino que nos apoyamos en tablas y propiedades como la regla de la cadena, el cálculo de transformadas de Fourier normalmente se basa también en tablas y propiedades. Al escribir estas páginas, me propuse solamente dar una idea de los conceptos de series y transformadas de Fourier, mostrando cómo surgen naturalmente de la herramienta matemática en la que hemos centrado este libro: los fasores.

Epílogo

Nuestro progresivo ascenso hacia matemáticas más avanzadas nos ha traído lejos del humilde comienzo describiendo el giro de las agujas sobre la cara de un reloj. No hemos alcanzado la cumbre todavía, pero para seguir subiendo necesitamos equipamiento que no puedo proveer sin alejarme demasiado del objetivo que me propuse en esta expedición. Claro que no puedo resistirme a señalar el camino a un par de picos que se vislumbran desde aquí.

El ejercicio 70 mostró la equivalencia entre las ecuaciones de una cadena arbitraria de osciladores acoplados y otra con todas las masas iguales a la unidad:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0.$$

Vemos una expresión tan sencilla que nos tienta escribir la solución como

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{K}}t}\ \hat{\mathbf{x}}.$$

Para ello, tendríamos que definir lo que significa la raíz cuadrada de la matriz $\mathbf{K}$ y la exponencial de esta raíz cuadrada. Obtenemos una primera pista sobre el significado de la exponencial de $-\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{K}}t$ resolviendo el sistema en las coordenadas de los modos normales.

$$\ddot{\xi} + \mathbf{\Omega}\xi = 0.$$

En esta representación, la matriz $\mathbf{\Omega}$ tiene forma diagonal y tenemos ecuaciones independientes para cada modo, por lo que encontramos con facilidad la solución.

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\omega_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\mathrm{i}\omega_N t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\xi}_N \end{pmatrix}.$$

Con $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ las frecuencias de los modos normales. Transformemos esta solución en su expresión en las coordenadas originales, utilizando el hecho

de que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\xi(\mathrm{t})$, siendo $\mathbf{P}^{-1}$ una matriz que contiene los autovectores de $\mathbf{K}$ por columnas, expresados en la base original. Como $\xi(t) = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$, la solución anterior se convierte en

$$\mathbf{P}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\omega_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\mathrm{i}\omega_N t} \end{pmatrix} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_N \end{pmatrix}.$$

Multiplicando a ambos lados por $\mathbf{P}^{-1}$, obtenemos una expresión para la solución $\mathbf{x}(t)$ que, al compararla con la que escribimos más arriba, revela que

$$e^{-\mathrm{i}\sqrt{\mathbf{K}}t} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\omega_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\mathrm{i}\omega_N t} \end{pmatrix} \mathbf{P}.$$

Es decir, la solución se expresa formalmente como un fasor cuya "frecuencia" sería la raíz cuadrada de una matriz.

Desde luego, la solución queda retratada de manera elegante y compacta, pero no ahorra trabajo. Seguimos teniendo que calcular los autovalores y autovectores de $\mathbf{K}$. El interés de este punto de vista, sin embargo, procede de la generalización de la operación de exponenciación, que se puede extender todavía más. Tomemos, por ejemplo, la ecuación de Schrödinger en una dimensión, escrita en la forma

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}\Psi$$

donde $\mathbf{H}$ representa el operador diferencial hamiltonianio

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

$\mathbf{H}$ no es una función, sino un objeto que convierte una función Ψ en otra $\mathbf{H}\Psi$ (nótese que en la definición de $\mathbf{H}$ las derivadas no se han aplicado todavía a función alguna). ¿No podríamos escribir también la solución de la ecuación de Schrödinger como un fasor? Como probalemente sospecharás ya, sí:

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathbf{H}t}\Psi(x,0),$$

pero primero hay que especificar lo que queremos decir con la exponencial del operador hamiltoniano.

La misma idea puede aplicarse también a la mecánica clásica hamiltoniana. La evolución de los sistemas clásicos obedece la ecuación de Liouville,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{i}\mathbf{L}\rho.$$

Aquí la función $\rho(\mathbf{z}, t)$ representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ con posiciones $\mathbf{q}$ y momentos $\mathbf{p}$ en el tiempo t, y $\mathbf{L}$ el operador de Liouville,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

H representa aquí la función hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ del sistema mecánico. De nuevo, si poseemos una definición adecuada de la exponencial del operador diferencial $\mathbf{L}$, la solución formal de la ecuación de Liouville no es más que

$$\rho(\mathbf{z}, t) = e^{-\mathrm{i}\mathbf{L}t} \rho(\mathbf{z}, 0).$$

En otras palabras, a nivel fundamental, los fasores representan en cierto sentido todas las evoluciones dinámicas de sistemas tanto clásicos como cuánticos.

El matemático del siglo XVIII no podía imaginar que la misma herramienta que utilizaba para calcular el giro de las agujas del reloj en respuesta a la tensión del muelle oculto en el barrilete del mecanismo interno, se aplicaría siglos más tarde a trazar los movimientos del universo entero avanzando inexorablemente bajo la tracción de las leyes de la física.

Respuestas a los ejercicios

Osciladores

R-Ejercicio 1 [Enunciado: página 7] La aguja horaria, el minutero y el segundero se pueden representar como fasores. A las 12 apuntan hacia arriba, así que usamos un número complejo de la forma $Re^{\mathrm{i}\pi/2}$ para indicar su posición inicial. Como la longitud de las agujas es irrelevante en este problema, la dejaremos igual a R para las tres. Los fasores

$$\begin{aligned} S(t) &= Re^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{60}t} = Re^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{60}t-\frac{\pi}{2}\right)}, \\ M(t) &= Re^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{60\times 60}t}, = Re^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3600}t-\frac{\pi}{2}\right)}, \\ H(t) &= Re^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{60\times 60\times 12}t} = Re^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{43200}t-\frac{\pi}{2}\right)}, \end{aligned}$$

corresponden, respectivamente, al segundero, minutero y la aguja de las horas.

La aguja horaria coincide con el minutero cuando los exponentes de $H(t)$ y $M(t)$ difieren en $2\pi\mathrm{i}n$, siendo n un número entero cualquiera.

$$-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3600}t-\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{43200}t-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\mathrm{i}n.$$

Despejando t, vemos que

$$t = \frac{43200}{11}n,$$

que es, en segundos, algo más de una hora y cinco minutos.

Para ver cuándo coincide la aguja de las horas con el segundero, hacemos un cálculo parecido.

$$-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{60}t-\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{43200}t-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\mathrm{i}m.$$

donde m representa cualquier número entero. En este caso,

$$t = \frac{43200}{719}m,$$

en segundos, un poquito más de un minuto.

Para saber cúando se encuentran las tres agujas, igualamos los dos tiempos

$$\frac{43200}{11}n = \frac{43200}{719}m.$$

En otras palabras, las agujas coinciden cuando n y m son tales que

$$\frac{n}{m} = \frac{11}{719},$$

lo cual ocurre, evidentemente, cuando $n = 11$ y $m = 719$, es decir, cada doce horas (como podemos ver sustituyendo estos números enteros en las fórmulas para los tiempos). Ahora bien, nos gustaría saber si hay alguna otra hora a la que se encuentren, pero 11 y 719 son ambos números primos así que la fracción no se puede simplificar más y las únicas soluciones son múltiplos de doce horas.

R-Ejercicio 2 [Enunciado: página 8] No hay más que derivar $F(t)$. Lo más sencillo es derivar directamente la exponencial, pero escribir el fasor en forma trigonométrica funciona igual:

$$\begin{aligned}\frac{dF(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}R\left(\cos(-\omega t+\theta)+\mathrm{i}\sin(-\omega t+\theta)\right)\\ &= R\left(\omega\sin(-\omega t+\theta)-\mathrm{i}\omega\cos(-\omega t+\theta)\right)\\ &= (-\mathrm{i}\omega)R\left(\cos(-\omega t+\theta)+\mathrm{i}\sin(-\omega t+\theta)\right)\\ &= (-\mathrm{i}\omega)F(t).\end{aligned}$$

En forma exponencial, tenemos simplemente que

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d}{dt}Re^{-\mathrm{i}(\omega t-\theta)} = (-\mathrm{i}\omega)Re^{-\mathrm{i}(\omega t-\theta)} = (-\mathrm{i}\omega)F(t).$$

Al volver a derivar, simplemente multiplicamos por un nuevo factor $(-\mathrm{i}\omega)$,

$$\frac{dF(t)}{dt} = (-\mathrm{i}\omega)(-\mathrm{i}\omega)F(t) = -\omega^2F(t).$$

R-Ejercicio 3 [Enunciado: página 9]

1. El complejo conjugado de una exponencial se obtiene simplemente conjugando el exponente, como se puede ver debajo.

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= \overline{Ae^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t}} \\
&= A\overline{\left(\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)} \\
&= A\left(\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \mathrm{i}\sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) \\
&= A\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mathrm{i}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) \\
&= Ae^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t},
\end{aligned}$$

   donde hemos utilizado el hecho de que el seno y el coseno son funciones impar y par, respectivamente, es decir $\sin(-\alpha) = \sin(\alpha)$ y $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

2. Al sustituir $\bar{x}(t)$ en la ecuación diferencial obtenemos

$$-m\frac{k}{m}x(t) = -kx(t).$$

3. Utilizando la fórmula de Euler y llevando a cabo las operaciones,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(x(t)) &= \frac{A\left(e^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)}{2}, \\
&= \frac{A\left(\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)}{2}, \\
&= \frac{2A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}{2} \\
&= A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)
\end{aligned}$$

   Para la parte imaginaria se opera de manera parecida.

R-Ejercicio 4 [Enunciado: página 10] Sustituyendo $t = 0$ en la expresión de la posición $x(t)$, que debería ser igual a 1 m vemos que

$$x(0) = A\cos(\omega\ 0) + B\sin(\omega\ 0) = A = 1,$$

mientras que en la expresión de la velocidad vemos que

$$\dot{x}(0) = -A\omega \sin(\omega\ 0) + B\omega \cos(\omega\ 0) = B\omega = -1.$$

Luego $B = -1/\omega$.
La solución exponencial es equivalente, ya que

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\right) e^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\right) (\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)) \\ &= \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + \mathrm{i}\left(\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right). \end{aligned}$$

Tomando la parte real,

$$\mathrm{Re}(x(t)) = \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

R-Ejercicio 5 [Enunciado: página 11] Si las soluciones obtenidas son iguales,

$$e^{-\mathrm{i}\omega t} = e^{+\mathrm{i}\omega' t} = e^{\omega'' t},$$

entonces tendrán que coincidir los exponentes y esto nos lleva a concluir que

$$\begin{aligned} \omega' &= -\omega, \\ \omega'' &= -\mathrm{i}\omega. \end{aligned}$$

Pero vamos a comprobar que se puede operar de manera equivalente con estas nuevas soluciones de prueba. Sustituyendo $x(t) = e^{+\mathrm{i}\omega' t}$ en la ecuación del oscilador armónico, obtenemos

$$-m\omega'^2 x(t) = -kx(t),$$

luego $\omega' = \pm\sqrt{k/m}$, exactamente igual que vimos antes. Si probamos con la otra solución, $x(t) = e^{\omega'' t}$, al sustituir nos queda

$$m\omega''^2 x(t) = -kx(t).$$

En este caso, la condición sobre la frecuencia angular es

$$\omega'' = \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

que una vez sustituido en la expresión de la solución, nos da nuevamente la solución que conocíamos:

$$x(t) = e^{\pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}t}.$$

R-Ejercicio 6 [Enunciado: página 12] Sustituyendo el fasor en la ecuación diferencial y llevando a cabo las derivadas, vemos que

$$-m\omega^2 x = -kx + \mathrm{i}\omega\gamma x.$$

Descartando la solución trivial $x(t) = 0$, podemos dividir por x y obtenemos una ecuación de segundo grado para ω.

$$m\omega^2 + \mathrm{i}\omega\gamma - k = 0.$$

Obtenemos dos soluciones posibles para ω,

$$\omega = \frac{-\mathrm{i}\gamma \pm \sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}.$$

R-Ejercicio 7 [Enunciado: página 12] Derivando $x(t) = te^{-\mathrm{i}\omega t}$,

$$\dot{x}(t) = (1 - \mathrm{i}\omega t)e^{-\mathrm{i}\omega},$$
$$\ddot{x}(t) = -(2\mathrm{i}\omega + \omega^2 t)e^{-\mathrm{i}\omega}.$$

Sustituyendo $x(t)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial,

$$-m\omega^2 t - 2mi\omega = -\gamma + \mathrm{i}\omega\gamma t - kt,$$

donde hemos dividido toda la ecuación entre $e^{-\mathrm{i}\omega t}$. Como $\omega = -\mathrm{i}\gamma/(2m)$, la expresión anterior se convierte en

$$-\gamma + \frac{\gamma^2}{4m}t = -\gamma + \frac{\gamma^2}{2m}t - kt.$$

La identidad se cumple, ya que la condición de amortiguamiento crítico es $k = \gamma^2/(4m)$, que podemos sustituir en la ecuación anterior. Al operar quedan los dos lados iguales.
Utilizando el tiempo $t = 0$ en la solución general y su derivada, sabiendo que $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$, obtenemos los valores de las constantes A y B.

$$x(0) = Ae^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0} + B \cdot 0 \cdot e^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0} = A = 0,$$
$$\dot{x}(0) = Be^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0} - \mathrm{i}\omega B \cdot 0 \cdot e^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0} = B = 2,$$

lo cual nos deja con la solución particular

$$x(t) = 2te^{-\mathrm{i}\omega t} = 2te^{-\gamma t/(2m)}.$$

R-Ejercicio 8 [Enunciado: página 14] Que x_H sea solución de la ecuación homogénea significa que

$$m\ddot{x}_H + \gamma\dot{x}_H + kx_H = 0.$$

Como x_P es solución de la ecuación no homogénea, entonces

$$m\ddot{x}_P + \gamma\dot{x}_P + kx_P = F(t).$$

Sustituyendo $x = x_H + x_P$ en la ecuación diferencial,

$$m(\ddot{x}_H + \ddot{x}_P) + \gamma(\dot{x}_H + \dot{x}_P) + k(x_H + x_P) = F(t).$$

Agrupando los términos según tengan H o P,

$$(m\ddot{x}_H + \gamma\dot{x}_H + kx_H) + (m\ddot{x}_P + \gamma\dot{x}_P + kx_P) = F(t).$$

Hemos visto antes que el primer paréntesis es igual a cero y el segundo a $F(t)$, luego la ecuación se satisface.

R-Ejercicio 9 [Enunciado: página 14] Tenemos que resolver la ecuación del movimiento forzado con una fuerza $F(t) = -mg$ independiente del tiempo para representar el peso.

$$m\ddot{x} = -kx - mg.$$

La ecuación homogénea correspondiente no es más que la del oscilador armónico, $m\ddot{x} = -kx$, cuya solución escribimos

$$x_H(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega t} + Be^{\mathrm{i}\omega t},$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$. Para encontrar la solución particular podemos utilizar la intuición física. Una solución posible consiste en que la masa se mantenga quieta, con la fuerza del muelle compensando la fuerza de la gravedad, $x_P(t) = -mg/k$. Como esta solución no depende del tiempo, sus derivadas son nulas y, al introducirla en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_P &= -kx_P - mg, \\ 0 &= -k\left(-\frac{mg}{k}\right) - mg = 0, \end{aligned}$$

vemos que se satisface. La solución general de la ecuación queda entonces

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega t} + Be^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{mg}{k},$$

que es un movimiento armónico simple centrado en el punto $x = -mg/k$. Si suponemos que el muelle comienza en su posición de equilibrio ($x = 0$) y que dejamos la masa con velocidad nula ($\dot{x} = 0$), podemos determinar las constantes A y B,

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B - \frac{mg}{k} = 0, \\ \dot{x}(0) &= -\mathrm{i}\omega A + \mathrm{i}\omega B = 0. \end{aligned}$$

De aquí resolvemos que $A = B = mg/(2k)$, y eso nos lleva finalmente a

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mg}{k}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}\omega t}}{2} - 1\right) \\ &= \frac{mg}{k}(\cos(\omega t) - 1). \end{aligned}$$

R-Ejercicio 10 [Enunciado: página 14] En este caso, la ecuación diferencial a resolver es

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx - mg.$$

La solución particular propuesta en la resolución anterior es $x_P = -mg/k$, que sustituido en la ecuación produce

$$m\ 0 = -\gamma\ 0 - k\left(-\frac{mg}{k}\right) - mg = 0,$$

pues las derivadas se anulan, $\ddot{x} = \dot{x} = 0$. Entonces x_P nos sirve como solución particular también en este caso. La solución general queda

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + Be^{-\mathrm{i}\omega_2 t} - \frac{mg}{k},$$

con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-\mathrm{i}\gamma + \sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}, \\ \omega_2 &= \frac{-\mathrm{i}\gamma - \sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}, \end{aligned}$$

porque x_H es ahora la solución de la ecuación amortiguada. Aplicamos las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x} = 0$ para determinar las constantes A y B.

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B - \frac{mg}{k} = 0, \\ \dot{x}(0) &= -\mathrm{i}\omega_1 A - \mathrm{i}\omega_2 B = 0. \end{aligned}$$

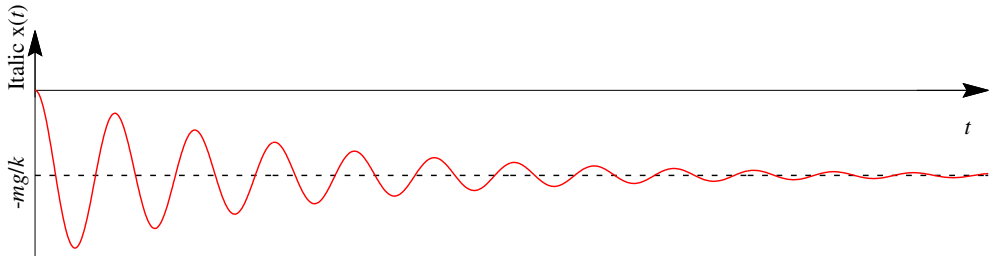


Figura 19: Elongación $x(t)$ de la masa colgada de un muelle respecto de la posición de equilibrio como función del tiempo.

La segunda condición nos dice que

$$B = -\frac{\omega_1}{\omega_2} A.$$

Sustituyendo B en la primera condición,

$$A = \frac{mg\omega_2}{k(\omega_2 - \omega_1)},$$

lo que nos deja con

$$B = -\frac{mg\omega_1}{k(\omega_2 - \omega_1)}.$$

Tomando la parte real de la solución y operando, deberíamos llegar a

$$x(t) = \frac{mg}{k} e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left(\cos(\mathrm{Re}(\omega_1)t) + \frac{\gamma}{2m\ \mathrm{Re}(\omega_1)} \sin(\mathrm{Re}(\omega_1)t) \right) - \frac{mg}{k},$$

con

$$\mathrm{Re}(\omega_1) = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}.$$

La ecuación corresponde a una oscilación amortiguada que acaba parándose a la altura $x = -mg/k$ (Figura 19).

R-Ejercicio 11 [Enunciado: página 16] Utilizamos el fasor $x(t) = x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ en la ecuación del oscilador forzado con $F(t) = F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ y obtenemos

$$-m\omega_F^2 x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t} = \mathrm{i}\omega_F \gamma x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t} - k x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t} + F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$$

Dividiendo la ecuación entre el factor $e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ y despejando x_0,

$$x_0 = \frac{F_0}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F \gamma}.$$

R-Ejercicio 12 [Enunciado: página 16] Escribimos la solución general

$$x(t) = Ae^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + Be^{\mathrm{i}\omega_2 t} + x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t},$$

con

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{-\mathrm{i}\gamma + \sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}, \\
\omega_2 &= \frac{-\mathrm{i}\gamma - \sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}, \\
x_0 &= \frac{F_0}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F\gamma},
\end{aligned}$$

y calculamos la parte real.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(x(t)) =& e^{\mathrm{Im}(\omega_1)t}\left(\mathrm{Re}(A)\cos(\mathrm{Re}(\omega_1)t) - \mathrm{Im}(A)\sin(\mathrm{Re}(\omega_1)t)\right) \\
&+ e^{\mathrm{Im}(\omega_2)t}\left(\mathrm{Re}(B)\cos(\mathrm{Re}(\omega_2)t) + \mathrm{Im}(B)\sin(\mathrm{Re}(\omega_2)t)\right) \\
&+ \mathrm{Re}(x_0)\cos(\omega_F t) + \mathrm{Im}(x_0)\sin(\omega_F t),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(x_0) &= \frac{F_0(k - m\omega_F^2)}{(k - m\omega_F^2)^2 + \omega_F^2\gamma^2}, \\
\mathrm{Im}(x_0) &= \frac{F_0\omega_F\gamma}{(k - m\omega_F^2)^2 + \omega_F^2\gamma^2}.
\end{aligned}$$

No es difícil (pero sí muy tedioso) comprobar que $\mathrm{Re}(x(t))$ satisface la ecuación diferencial forzada. Sin embargo, tomaremos el siguiente atajo. Sabemos que la solución de la ecuación homogénea asociada, x_H se anula en la expresión

$$m\ddot{x}_H + \gamma\dot{x}_H + kx_H = 0.$$

Tomando la parte real, la expresión se convierte en

$$m\,\mathrm{Re}(\ddot{x}_H) + \gamma\,\mathrm{Re}(\dot{x}_H) + k\,\mathrm{Re}(x_H) = 0.$$

Si escribimos la solución general como suma de la homogénea más la particular

$$\mathrm{Re}(x(t)) = \mathrm{Re}(x_H(t)) + \mathrm{Re}(x_P(t)),$$

al sustituir en la ecuación forzada, sabemos que se anularán todos los términos con $\mathrm{Re}(x_H)$, dejando

$$m\,\mathrm{Re}(\ddot{x}_P) + \gamma\,\mathrm{Re}(\dot{x}_P) + k\,\mathrm{Re}(x_P) = F_0\cos(\omega_F t).$$

Sacando factor común a $\mathrm{Re}(x_P)$,

$$(-m\omega_F^2 - \gamma\omega_F + k)\,\mathrm{Re}(x_P) = F_0\cos(\omega_F t),$$

e introduciendo la expresión para la parte real de x_P,

$$\mathrm{Re}(x_P(t)) = \mathrm{Re}(x_0)\cos(\omega_F t) + \mathrm{Im}(x_0)\sin(\omega_F t),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -m\omega_F^2(\mathrm{Re}(x_0)\cos(\omega_F t) + \mathrm{Im}(x_0)\sin(\omega_F t)) \\ +\gamma\omega_F(-\mathrm{Re}(x_0)\sin(\omega_F t) + \mathrm{Im}(x_0)\cos(\omega_F t)) \\ +k(\mathrm{Re}(x_0)\cos(\omega_F t) + \mathrm{Im}(x_0)\sin(\omega_F t)) = F_0\cos(\omega_F t). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de $\mathrm{Re}(x_0)$ e $\mathrm{Im}(x_0)$ de antes, se puede comprobar que se cumple la ecuación.
Alternativamente, se puede ensayar la solución particular

$$x_P(t) = A\cos(\omega_F t) + B\sin(\omega_F t).$$

En este caso, obtenemos

$$\begin{aligned} -m\omega_F^2(A\cos(\omega_F t) + B\sin(\omega_F t)) \\ +\gamma\omega_F(-A\sin(\omega_F t) + B\cos(\omega_F t)) \\ +k(A\cos(\omega_F t) + B\sin(\omega_F t)) = F_0\cos(\omega_F t). \end{aligned}$$

Agrupando los términos de la izquierda según tengan senos o cosenos,

$$\begin{aligned} (-m\omega_F^2 A + \gamma\omega_F B + kA)\cos(\omega_F t) \\ +(-m\omega_F^2 B + \gamma\omega_F A + kB)\sin(\omega_F t) = F_0\cos(\omega_F t). \end{aligned}$$

Comparando los dos lados de la ecuación, vemos que el coeficiente del coseno a la izquierda debe ser igual a F_0 y que el del seno se debe anular,

$$\begin{aligned} -m\omega_F^2 A + \gamma\omega_F B + kA = F_0, \\ -m\omega_F^2 B + \gamma\omega_F A + kB = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo esta pareja de ecuaciones, comprobamos que $A = \mathrm{Re}(x_0)$ y $B = \mathrm{Im}(x_0)$.
La moraleja de esta historia es que los cálculos se simplifican muchísimo si utilizamos fasores para resolver la ecuación compleja y tomamos al final la parte real de la solución.

R-Ejercicio 13 [Enunciado: página 16] Consideremos los siguientes dos problemas que ya sabemos resolver:

$$m\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + kx_1 = F_0 e^{\mathrm{i}\omega_F t},$$
$$m\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + kx_2 = F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Las soluciones son

$$x_1(t) = \frac{F_0 e^{\mathrm{i}\omega_F t}}{k - m\omega_F^2 + \mathrm{i}\omega_F},$$
$$x_2(t) = \frac{F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F}.$$

Si multiplicamos las dos ecuaciones diferenciales por $1/(2\mathrm{i})$ y las restamos, obtenemos

$$m\left(\frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}{2\mathrm{i}}\right) + \gamma\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2\mathrm{i}}\right) + k\left(\frac{x_1 - x_2}{2\mathrm{i}}\right) = F_0\frac{e^{\mathrm{i}\omega_F t} - e^{-\mathrm{i}\omega_F t}}{2\mathrm{i}}.$$

Pero la expresión de la derecha no es más que la forzante para la que queríamos resolver el problema del movimiento forzado, porque

$$F_0\frac{e^{\mathrm{i}\omega_F t} - e^{-\mathrm{i}\omega_F t}}{2\mathrm{i}} = F_0\sin(\omega_F t).$$

Por tanto, la solución de la ecuación del enunciado es la resta de las soluciones x_1 y x_2 dividida entre 2i.

$$x(t) = \frac{F_0}{2i}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\omega_F t}}{k - m\omega_F^2 + \mathrm{i}\omega_F} - \frac{e^{-\mathrm{i}\omega_F t}}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F}\right).$$

Ahora bien, como tenemos una forzante real, queremos escribir la solución como una función real, sin factores imaginarios. Operando, podemos progresar hasta

$$x(t) = F_0\left(\frac{(k - m\omega_F^2)\sin(\omega_F t) - \omega_F\gamma\cos(\omega_F t)}{(k - m\omega_F^2)^2 + \omega_F^2\gamma^2}\right).$$

Evidentemente, el resultado no es más que

$$x(t) = -\operatorname{Im}\left(x_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}\right).$$

Es precisamente lo que esperaríamos, ya que la forzante es

$$F(t) = -\operatorname{Im}\left(F_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}\right).$$

R-Ejercicio 14 [Enunciado: página 17] Las propiedades del módulo nos permiten escribir

$$|x_0| = \left| \frac{F_0}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F\gamma} \right| = \frac{|F_0|}{|k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F\gamma|}.$$

Calculando el módulo del denominador,

$$|x_0| = \frac{|F_0|}{\sqrt{(k - m\omega_F^2)^2 + (\omega_F\gamma)^2}}.$$

El numerador no depende de ω_F, por lo que F_0 será máximo cuando el denominador alcance su valor mínimo. En la práctica, se dice a menudo que el efecto de la fricción es pequeño y se desprecia el término con γ en el denominador. En ese caso, es evidente que la fracción tiende a infinito cuando la frecuencia ω_F se aproxima a la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Para determinar cuándo encontramos resonancia en el caso general, derivamos el denominador respecto de ω_F e igualamos a cero. Simplificando la ecuación, al final nos queda

$$4m^2\omega_F^3 + (2\gamma^2 - 4km)\omega_F = 0.$$

Una solución posible de esta ecuación es $\omega_F = 0$. Si la descartamos y dividimos por ω_F, obtenemos una ecuación de segundo grado cuya solución es el valor de ω_F que maximiza $|x_0|$:

$$\omega_F = \pm\sqrt{\frac{2km - \gamma^2}{2m^2}}.$$

Cuanto menor es γ, más se acerca ω_F a la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. En el máximo,

$$|x_0| = \frac{2m^2|F_0|}{(2km - \gamma^2)\gamma^2},$$

que efectivamente se hace más grande cuanto menor sea el valor absoluto de γ.

Los fenómenos de resonancia pueden llevar al colapso de grandes estructuras, debido al incremento descontrolado de las oscilaciones. Como ejemplo, se suele mencionar el derrumbe del puente de Tacoma Narrows en 1940. Sin embargo, como veremos, la resonancia también tiene aplicaciones tecnológicas.

Ecuaciones diferenciales

R-Ejercicio 15 [Enunciado: página 21] Ensayando la solución $x(t) = e^{-\mathrm{i}\omega t}$, la ecuación diferencial se convierte en la ecuación indicial

$$(-\mathrm{i}\omega)^3 + 2(-\mathrm{i}\omega)^2 - (-\mathrm{i}\omega) - 2 = 0.$$

Calculando las potencias,

$$\mathrm{i}\omega^3 - 2\omega^2 + \mathrm{i}\omega - 2 = 0.$$

Dividiendo entre i,

$$\omega^3 + 2\mathrm{i}\omega^2 + \omega + 2\mathrm{i} = 0.$$

Factorizando el polinomio (con el método de Ruffini, por ejemplo),

$$(\omega - \mathrm{i})(\omega + \mathrm{i})(\omega + 2\mathrm{i}) = 0,$$

vemos que las raíces son $\omega_1 = \mathrm{i}$, $\omega_2 = -\mathrm{i}$ y $\omega_3 = -2\mathrm{i}$. Por lo tanto, la solución general será

$$x(t) = A_1 e^t + A_2 e^{-t} + A_3 e^{-2t}.$$

R-Ejercicio 16 [Enunciado: página 21] En este caso, la ecuación indicial será

$$\mathrm{i}\omega^3 + 3\omega^2 - 3\mathrm{i}\omega - 1 = 0.$$

Dividiendo entre i y factorizando,

$$(\omega - \mathrm{i})^3 = 0,$$

encontramos la raíz triple $\omega = i$, y la solución

$$x(t) = A_1 e^t + A_2 t e^t + A_3 t^2 e^t.$$

Al sustituir las funciones $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = te^t$ y $x_3(t) = t^2 e^t$ por seprado en la ecuación diferencial, comprobamos que son soluciones. Como la ecuación diferencial es lineal y homogénea, la combinación lineal de soluciones también es solución. Y, dado que las soluciones son linealmente independientes, y que tenemos el mismo número de soluciones independientes que el orden de la ecuación, $x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + A_3 x_3(t)$ tiene que ser la solución general.

R-Ejercicio 17 [Enunciado: página 21] La ecuación indicial

$$\omega^3 - \mathrm{i}\omega^2 + \omega - \mathrm{i} = 0.$$

Tiene una raíz simple $\omega_1 = -\mathrm{i}$ y una doble $\omega_2 = \mathrm{i}$. La solución general será entonces

$$x(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{t} + A_3 t e^{t}.$$

R-Ejercicio 18 [Enunciado: página 22] Ya hemos calculado la solución de la ecuación homogénea asociada en el ejercicio anterior. Ahora necesitamos una solución particular. En lugar de la ecuación del enunciado, resolveremos

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 1 = F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

y nos quedaremos con la parte real de la solución particular. Probamos con

$$x_P(t) = x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Sustituida en la ecuación, nos lleva a la siguiente condición sobre x_0:

$$\mathrm{i}\omega_F^3 x_0 + \omega_F^2 x_0 + \mathrm{i}\omega_F x_0 + x_0 = F_0.$$

Despejando x_0,

$$x_0 = \frac{F_0}{(\omega_F^2 + 1) + \mathrm{i}(\omega_F^3 + \omega_F)}.$$

Para hallar la solución general de la ecuación del enunciado, sumamos la parte real de $x_P(t)$ a la solución de la ecuación homogénea $x_H(t)$ calculada en el ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_H(t) + \mathrm{Re}(x_P(t)) \\ &= A_1 e^{-t} + A_2 e^{t} + A_3 t e^{t} + \frac{F_0((\omega_F^2+1)\cos(\omega_F t) - (\omega_F^3 + \omega_F)\sin(\omega_F t))}{(\omega_F^2+1)^2 + (\omega_F^3+\omega_F)^2}. \end{aligned}$$

R-Ejercicio 19 [Enunciado: página 22] Empezaremos resolviendo un problema diferente.

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Buscamos una solución particular de la forma $x_P(t) = x_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$. Sustituyendo x_P en la ecuación, vemos que

$$x_0 = \frac{F0}{(\omega_F^3 + \omega_F) + 2\mathrm{i}(\omega_F^2 + 2)}.$$

Para avanzar en la resolución del enunciado, nos fijamos ahora en estas dos ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} + 2\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt} - 2x_1 = F_1\cos(\omega_{F_1}t),$$
$$\frac{d^3x_2}{dt^3} + 2\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{dx_2}{dt} - 2x_2 = -F_2\sin(\omega_{F_2}t).$$

Estas ecuaciones no son más que la parte real e imaginaria de la que acabamos de resolver, pero hemos sustituido F_0 y ω_F por F_1 y ω_{F_1}, en el primer caso, y por F_2 y ω_{F_2}, en el segundo. Esto quiere decir que podemos escribir directamente una solución particular tomando las partes real e imaginaria de x_P con las sustituciones pertinentes.

$$x_1 = \frac{F_1((\omega_{F_1}^3 + \omega_{F_1})\cos(\omega_{F_1}t) - (\omega_{F_1}^2 + 2)\sin(\omega_{F_1}t))}{(\omega_{F_1}^3 + \omega_{F_1})^2 + 4(\omega_{F_1}^2 + 2)^2},$$
$$x_2 = \frac{F_2(-(\omega_{F_2}^3 + \omega_{F_2})\sin(\omega_{F_2}t) - (\omega_{F_2}^2 + 2)\cos(\omega_{F_2}t))}{(\omega_{F_2}^3 + \omega_{F_2})^2 + 4(\omega_{F_2}^2 + 2)^2}.$$

Finalmente, la solución general a la ecuación del enunciado es la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada (calculada en el problema 15) más $x_1 + x_2$.

$$\begin{aligned} x(t) =& A_1e^t + A_2e^{-t} + A_3e^{-2t} \\ &+ \frac{F_1((\omega_{F_1}^3 + \omega_{F_1})\cos(\omega_{F_1}t) - (\omega_{F_1}^2 + 2)\sin(\omega_{F_1}t))}{(\omega_{F_1}^3 + \omega_{F_1})^2 + 4(\omega_{F_1}^2 + 2)^2} \\ &+ \frac{F_2(-(\omega_{F_2}^3 + \omega_{F_2})\sin(\omega_{F_2}t) - (\omega_{F_2}^2 + 2)\cos(\omega_{F_2}t))}{(\omega_{F_2}^3 + \omega_{F_2})^2 + 4(\omega_{F_2}^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

R-Ejercicio 20 [Enunciado: página 24] Estamos ante una ecuación de la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x),$$

con $P(x) = (x - 1/x)$, $Q(x) = x^2$ y $F(x) = 0$. Se satisface la condición que garantiza que podemos convertir la ecuación diferencial en una lineal con coeficientes constantes.

$$\frac{2P(x)Q(x) - Q'(x)}{(Q(x))^{3/2}} = \frac{2\left(x - \frac{1}{x}\right)x^2 + 2x}{x^3} = 2.$$

El cambio de variable necesario es

$$t = \int \sqrt{Q(x)}dx = \frac{x^2}{2},$$

de modo que la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

La ecuación indicial,

$$-\omega^2 - \mathrm{i}\omega + 1 = 0,$$

tiene por solución dos raíces complejas $\omega = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$ que implica que

$$y(t) = A_1 e^{-\frac{t}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t} + A_2 e^{-\frac{t}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t}$$

para dos constantes arbitrarias A_1 y A_2. Solo falta deshacer el cambio de variable

$$y(x) = A_1 e^{-\frac{x^2}{4}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} + A_2 e^{-\frac{x^2}{4}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}.$$

Si queremos funciones reales,

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}\left(A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) + A_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right)\right).$$

R-Ejercicio 21 [Enunciado: página 24] El cambio de variable recomendado es

$$t = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos(x),$$

o, lo que es lo mismo,

$$x = \cos(t).$$

Aplicando el cambio de variable a la ecuación,

$$-\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sin(t)} - \frac{y}{\sin(t)} = 1.$$

Al multiplicar por $-\sin(t)$, efectivamente encontramos una ecuación de coeficientes constantes.

$$\frac{dy}{dt} + y = -\sin(t).$$

Empezamos por la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

cuya solución es evidentemente $y(t) = Ae^{-t}$. A continuación, resolvemos el problema inhomogéneo cambiando el seno por una exponencial,

$$\frac{dy}{dt} + y = e^{-\mathrm{i}t},$$

ensayando una solución de la forma $y_P(t) = y_0 e^{-\mathrm{i}t}$ (para quedarnos al final con la parte imaginaria).

$$-\mathrm{i}y_0 + y_0 = 1.$$

Al despejar y_0,

$$y_0 = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}.$$

La solución general será

$$y(t) = Ae^{-t} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}e^{-\mathrm{i}t}.$$

Tomando la parte imaginaria,

$$y(t) = \mathrm{Im}(A)e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t)).$$

Deshaciendo el cambio de variable,

$$y(t) = \mathrm{Im}(A)e^{-\arccos(x)} + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right),$$

(usando el hecho de que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$). Aunque ha funcionado, probablemente no sea esta la mejor técnica de resolución en este caso.

R-Ejercicio 22 [Enunciado: página 24] El cambio de variable $x = e^t$ implica que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= y'\frac{dx}{dt} = y'e^t,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dx}\left(y'e^t\right)\frac{dx}{dt} = y''e^{2t} + y'e^t.\end{aligned}$$

Despejando las derivadas respecto de x,

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dt}e^{-t},\\ y'' &= \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - y'e^{-t} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t},\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos la ecuación deseada.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0.$$

R-Ejercicio 23 [Enunciado: página 24] Además de las derivadas del ejercicio anterior, necesitamos

$$\frac{d^3y}{dt^3} = y'''e^{3t} + 3y''e^{2t} + y'e^t.$$

Despejando y''',

$$y''' = \frac{d^3y}{dt^3}e^{-3t} - 3y''e^{-t} - y'e^{-2t} = \frac{d^3y}{dt^3}e^{-3t} - 3\frac{d^2y}{dt^2}e^{-3t} + 2\frac{dy}{dt}e^{-3t}.$$

Sustituyendo las derivadas en la ecuación diferencial,

$$a\frac{d^3y}{dt^3} + (b-3)\frac{d^2y}{dt^2} + (c+2)\frac{dy}{dt} + dy = 0.$$

R-Ejercicio 24 [Enunciado: página 28] Dado el cambio de variables, podemos escribir las derivadas en términos de ξ y η:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta},\\
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\right),\\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas, la convertimos en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Al integrar respecto de ξ, obtenemos una función arbitraria de η, que llamaremos $g(\eta)$.

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = g(\eta).$$

Integrando ahora respecto de η, obtenemos la integral de g, que indicaremos con $G(\eta)$ más una función arbitraria de ξ:

$$y(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Deshaciendo el cambio de variables,

$$y(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Derivar estas funciones dos veces con respecto a t, obtenemos el mismo resultado que si las derivamos dos veces con respecto a x y luego multiplicamos por c^2. En otras palabras, satisfacen la ecuación de ondas.

R-Ejercicio 25 [Enunciado: página 28] Representa un par de funciones sencillas, como $F(x+ct) = x+ct$ y $G(x-ct) = \sin(x-ct)$ para varios valores de t (como $t = 0$, 1 y 2). La función mantiene la forma pero se va desplazando.

R-Ejercicio 26 [Enunciado: página 30] Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = \psi(x)\phi(t)$, que sustituida en la ecuación del calor nos da

$$\psi\frac{d\phi}{dt} = \alpha\phi\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Cuando separamos las funciones de x de las funciones de t,

$$\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\alpha}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Como ambos lados deben ser iguales a una constante, que llamaremos $-\lambda$, la ecuación diferencial se transforma en otras dos.

$$\frac{d\phi}{dt} = -\lambda\phi,$$
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{\lambda}{\alpha}\psi.$$

Al resolver la primera ecuación, obtenemos

$$\phi(t) = e^{-\lambda t},$$

mientras que la segunda nos lleva a

$$\psi(x) = e^{-\mathrm{i}kx},$$

con la constante k

$$k = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Ahora, para cada valor de λ que escojamos, tenemos soluciones de la forma

$$u(x,t) = \psi(x)\phi(t) = Ae^{-\lambda t}e^{\pm\mathrm{i}\sqrt{\lambda/\alpha}x}.$$

R-Ejercicio 27 [Enunciado: página 30] La ecuación diferencial para la distribución estacionaria es

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Integrando dos veces respecto de x,

$$u(x) = ax + b.$$

Las condiciones de contorno nos dicen que $u(0) = u_0$ y $u(L) = u_L$, luego

$$\begin{aligned} u(0) &= b = u_0, \\ u(L) &= aL + b = u_L. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $a = (u_L - u_0)/L$ y $b = u_0$. Concluimos, por tanto, que la distribución estacionaria es lineal:

$$u(x) = \frac{u_L - u_0}{L}x + u_0.$$

R-Ejercicio 28 [Enunciado: página 31] Conviene operar con mucho cuidado (he tenido que repetir varias veces los cálculos para obtener el resultado correcto). A estas alturas, estamos muy acostumbrados a las coordenadas polares.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Para transformar las derivadas parciales, necesitamos conocer las derivadas de r y θ respecto de x e y.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r\cos(\theta)}{r} = \cos(\theta). \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r\sin(\theta)}{r} = \sin(\theta). \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r}. \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\cos(\theta)}{r}. \end{aligned}$$

Las primeras derivadas de u en términos de r y θ quedan así:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}.$$

Mantendré todos los términos de las segundas derivadas en orden. Las primeras dos filas corresponden a las derivadas de $\partial u/\partial x$ respecto de r y las otras dos filas, respecto de θ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =& \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2(\theta) \\ &- \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2(\theta)}{r} \\ &+ \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r^2}\right)\cos(\theta) \\ &- \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\sin(\theta)}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right)\frac{\sin(\theta)}{r}.\end{aligned}$$

De manera análoga, para la segunda derivada respecto de y,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =& \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2(\theta) \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r}\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2(\theta)}{r} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r^2}\right)\sin(\theta) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\cos(\theta)}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin(\theta)}{r}\right)\frac{\cos(\theta)}{r}.\end{aligned}$$

Al sustituir las derivadas en la ecuación de Laplace y simplificar,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

R-Ejercicio 29 [Enunciado: página 31] La separación de variables consiste en suponer que la función que resuelve la ecuación resulta de un producto de funciones que llamaremos R y Θ, donde R depende solo de la variable

radial y Θ de la angular.

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Al sustituir en la ecuación diferencial del problema anterior,

$$\Theta\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\Theta}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = 0.$$

Agrupando las funciones de r a la izquierda y las de θ a la derecha,

$$\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}.$$

Ambos lados de la ecuación deben ser iguales a una constante, que llamaremos ω^2.

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} &= \omega^2,\\ -\frac{1}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} &= \omega^2.\end{aligned}$$

R-Ejercicio 30 [Enunciado: página 31] En la ecuación de la coordenada angular, reconocemos la ecuación del movimiento armónico, pero con la variable θ en lugar del tiempo.

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \omega^2\Theta = 0.$$

Para cada valor de ω tenemos soluciones de la forma

$$\Theta(\theta) = Ae^{-\mathrm{i}\omega\theta} + Be^{\mathrm{i}\omega\theta}.$$

R-Ejercicio 31 [Enunciado: página 32] Si multiplicamos la ecuación por R y dejamos los términos a la izquierda, obtenemos una ecuación de Euler-Cauchy para la variable r.

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r\frac{\partial R}{\partial r} - \omega^2 R = 0. \tag{1}$$

El cambio $r = e^t$ la convierte en una ecuación de coeficientes constantes.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \omega^2 R = 0. \tag{2}$$

Debido al signo negativo, la unidad imaginaria desaparece del exponente de la solución

$$R(t) = Ce^{-\omega t} + De^{\omega t}.$$

Deshaciendo el cambio de variable, $t = \ln r$,

$$R(r) = Cr^{-\omega} + Dr^{\omega}.$$

R-Ejercicio 32 [Enunciado: página 32] La solución de la ecuación del calor se escribe como el producto $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, siendo R y Θ las funciones obtenidas en los dos ejercicios anteriores.

$$u(r,\theta) = \left(Cr^{-\omega} + Dr^{\omega}\right)\left(Ae^{-\mathrm{i}\omega\theta} + Be^{\mathrm{i}\omega\theta}\right).$$

Como hacemos habitualmente ya, resolveremos el problema con la condición de frontera

$$u(1,\theta) = u_0 e^{-\mathrm{i}\theta},$$

para después quedarnos con la parte real. Sustituyendo nuestra solución a la izquierda en la condición anterior,

$$(C+D)\left(Ae^{-\mathrm{i}\omega\theta} + Be^{\mathrm{i}\omega\theta}\right) = u_0 e^{-\mathrm{i}\theta},$$

podemos hacer que encajen los dos lados poniendo $\omega = 1$, $A = u_0$, $B = 0$ y $C + D = 1$. Como ahora ya conocemos el valor de ω,

$$R(r) = \frac{C}{r} + Dr,$$

pero sabemos que la temperatura no será infinita en el centro del disco, por lo que podemos establecer (por razones físicas) que $C = 0$. En consecuencia, $D = 1$ y la solución al problema es

$$u(r,\theta) = u_0 r e^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Tomando la parte real, obtenemos la solución al problema del enunciado.

$$u(r,\theta) = u_0 r\cos(\theta).$$

Vibraciones

R-Ejercicio 33 [Enunciado: página 35] Queremos resolver la ecuación

$$\frac{dI}{dt}\,R + L\,\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}\,I(t) = V_0\omega_F\cos(\omega_F t).$$

Esta ecuación se convierte en la de un oscilador forzado con solo cambiar los nombres de las magnitudes:

$$\begin{aligned} I(t) &\leftrightarrow x(t),\\ L &\leftrightarrow m,\\ \frac{1}{C} &\leftrightarrow k,\\ R &\leftrightarrow \gamma,\\ V_0\ \omega_F &\leftrightarrow F_0. \end{aligned}$$

Y ese problema lo resolvimos con anterioridad, así que no hay más que copiar la solución cambiando el nombre de las variables según la correspondencia que acabamos de escribir.

$$\begin{aligned} I(t) =& e^{\mathrm{Im}(\omega_1)t}\left(\mathrm{Re}(A)\cos(\mathrm{Re}(\omega_1)t) - \mathrm{Im}(A)\sin(\mathrm{Re}(\omega_1)t)\right)\\ &+ e^{\mathrm{Im}(\omega_2)t}\left(\mathrm{Re}(B)\cos(\mathrm{Re}(\omega_2)t) + \mathrm{Im}(B)\sin(\mathrm{Re}(\omega_2)t)\right)\\ &+ \mathrm{Re}(I_0)\cos(\omega_F t) + \mathrm{Im}(I_0)\sin(\omega_F t), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-\mathrm{i}R + \sqrt{4(L/C) - R^2}}{2L},\\ \omega_2 &= \frac{-\mathrm{i}R - \sqrt{4(L/C) - R^2}}{2L},\\ I_0 &= \frac{-\mathrm{i}\omega_F V_0}{(1/C) - L\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F R}. \end{aligned}$$

R-Ejercicio 34 [Enunciado: página 35] Simplemente sustituimos la relación constitutiva en la definición de impedancia. Para la resistencia, la ley de Ohm implica que

$$Z_R = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{I(t)R}{I(t)} = R.$$

En el inductor, usamos la ley de Faraday

$$Z_L = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{L\frac{dI}{dt}}{I(t)} = \frac{-\mathrm{i}\omega_F L I(t)}{I(t)} = -\mathrm{i}\omega_F L.$$

Por último, para el condensador

$$Z_C = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V(t)}{C\frac{dV_C}{dt}} = \frac{V(t)}{-\mathrm{i}\omega_F C\ V(t)} = \frac{\mathrm{i}}{\omega_F C}.$$

R-Ejercicio 35 [Enunciado: página 36] Como de costumbre, tomamos tres funciones complejas

$$V_1(t) = e^{-\mathrm{i}\omega_1 t},$$
$$V_2(t) = e^{-\mathrm{i}\omega_2 t},$$
$$V_3(t) = e^{-\mathrm{i}\omega_3 t}.$$

Para cada una de estas señales, calculamos la respuesta simplemente dividiendo por la impedancia. Para $i = 1,\ 2$ y 3,

$$I_i(t) = \frac{V_i(t)}{Z} = \frac{e^{-\mathrm{i}\omega_i t}}{\frac{\mathrm{i}}{\omega_i C} - \mathrm{i}\omega_i L + R}.$$

Si sumamos las señales, la respuesta también es igual a la suma de respuestas

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = \sum_{i=1}^{3} I_i(t).$$

Finalmente, tomamos la parte real.

$$I(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{R\cos(\omega_i t) + \left(\omega_i L - \frac{1}{\omega_i C}\right)\sin(\omega_i t)}{\left(\frac{1}{\omega_i C} - \omega_i L\right)^2 + R^2}.$$

Al representar la solución (figura 20) vemos que la respuesta se aproxima más a la señal $V_2(t)$. Al multiplicar L por 25, la frecuencia de resonancia del circuito se aproxima ahora a la más lenta (ω_1), por lo que ahora la respuesta es más parecida a un coseno de frecuencia menor. Los receptores de ondas pueden aprovechar este principio para sintonizar diferentes frecuencias.

R-Ejercicio 36 [Enunciado: página 38] Desarrollamos en serie de Taylor $V(\theta)$ en torno a $\theta = 0$,

$$\begin{aligned} V(\theta) &= V(0) + V'(0)\theta + \frac{V''(0)}{2}\theta^2 + \frac{V'''(0)}{6}\theta^3 + \dots \\ &= mgl(1 - \cos(0)) + mgl\ \sin(0)\theta + \frac{mgl}{2}\ \cos(0)\theta^2 - \frac{mgl}{24}\cos(0)\theta^4 + \dots \\ &= \frac{mgl}{2}\theta^2 - \frac{mgl}{24}\theta^4 + \dots. \end{aligned}$$

Para valores pequeños de θ, el potencial es aproximadamente igual al primer término de la derecha.

$$V(\theta) \approx \frac{mgl}{2}\theta^2.$$

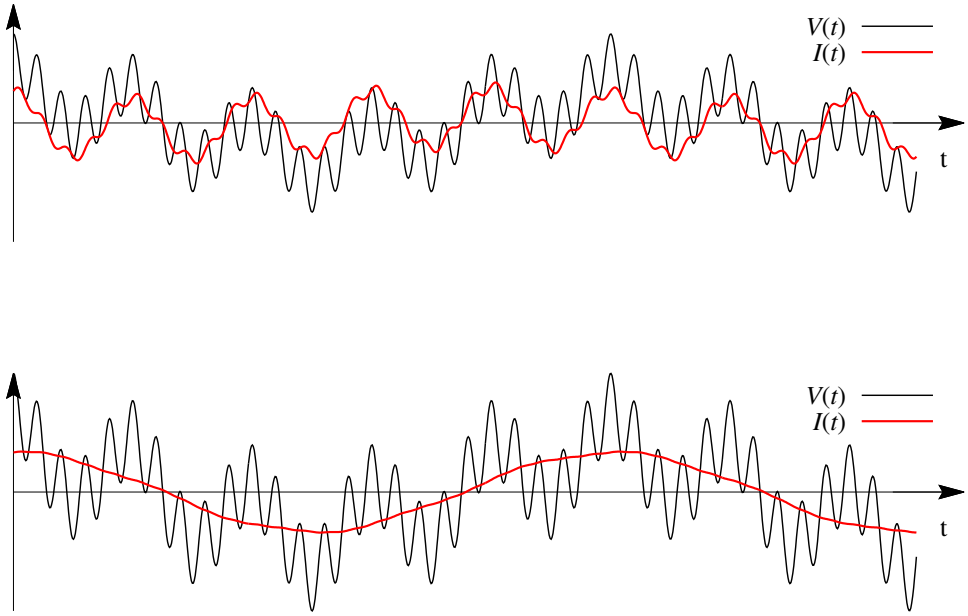


Figura 20: Señal $V(t)$ y respuesta $I(t)$ para el circuito RLC del ejercicio 35. $V(t)$ está compuesta de ondas de tres frecuencias. En la figura de arriba, se está sintonizando la frecuencia intermedia, en la de abajo la más lenta.

El momento de la fuerza sobre el péndulo será

$$M = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \approx -mgl\theta,$$

por lo que la ecuación del movimiento se convierte en

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta,$$

que no es más que la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia $\omega = \sqrt{g/l}$. En consecuencia, el periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

R-Ejercicio 37 [Enunciado: página 41] Para tres osciladores acoplados, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -1 & 0 \\ -1 & 2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igualamos el determinante de la matriz a cero,

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2\left(2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - 2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = 0.$$

Sacando factor común a $(1-\omega^2/\omega_0^2)$,

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - 2\right) = 0.$$

vemos que las soluciones del sistema se obtienen para

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1,$$
$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 3,$$
$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0.$$

En otras palabras, existen tres frecuencias, que llamaremos ω_1, ω_2 y ω_3 para las que todas las partículas comparten la misma frecuencia: $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$ y $\omega_3 = 0$.

R-Ejercicio 38 [Enunciado: página 41] Sustituyendo $\omega = \omega_1 = \omega_0$ en el sistema lineal de ecuaciones obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= -\hat{x}_3, \\ \hat{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

En palabras, la partícula central permanece quieta y los extremos oscilan con desplazamientos opuestos.

Con la segunda frecuencia, $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$ el sistema se transforma en

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo, $\hat{x}_1 = \hat{x}_3$, $\hat{x}_2 = -2\hat{x}_1$, que quiere decir que los extremos se mueven en el mismo sentido, mientras que el centro se mueve en el sentido opuesto con una amplitud mayor.

Por último, $\omega_3 = 0$ nos da el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

que implica $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3$. Aquí tenemos un caso curioso, porque la frecuencia se anula, es decir, las partículas no oscilan, pero no tienen por qué anularse los valores $\hat{x}_i$, mientras sean todos iguales. Esta solución corresponde a trasladar a otras coordenadas el sistema completo, manteniendo las distancias entre partículas, de modo que se mantengan en equilibrio.

R-Ejercicio 39 [Enunciado: página 42] Para extremos sujetos a un punto fijo, $x_0 = x_{N+1} = 0$. Para condiciones de contorno periódicas, $x_0 = x_N$ y $x_{N+1} = x_0$.

R-Ejercicio 40 [Enunciado: página 42] Si $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{x}}'$ son soluciones del sistema, eso quiere decir que cumplen

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}.$$

Entonces la suma de ambas también cumple la ecuación, ya que

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}') = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}.$$

R-Ejercicio 41 [Enunciado: página 42] Escribiremos la posición inicial como suma de las soluciones que encontramos en el ejercicio 38. Sean λ, μ y ν coeficientes desconocidos, y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \lambda e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \mu e^{-\mathrm{i}3\omega_0 t} + \nu, \\ x_2(t) &= -2\mu e^{-\mathrm{i}\sqrt{3}\omega_0 t} + \nu, \\ x_3(t) &= -\lambda e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + \mu e^{-\mathrm{i}3\omega_0 t} + \nu. \end{aligned}$$

De manera abreviada, escribiremos

$$\mathbf{x}(t) = \lambda e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu e^{-\mathrm{i}\sqrt{3}\omega_0 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿De dónde vienen estas ecuaciones? Estamos escribiendo $x(t)$ como combinación lineal de las soluciones que obtuvimos en el ejercicio 38 para las frecuencias $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$ y $\omega_3 = 0$. Para la frecuencia ω_1, vimos que el coeficiente de x_2 se anulaba y que el de x_1 tenía el signo opuesto a x_3, de ahí que hayamos multiplicado el primer coeficiente por el vector $(1,\ 0,\ -1)$. Del mismo modo, los coeficientes para la solución de frecuencia ω_2 guardaban la relación $(1,\ -2,\ 1)$. El último término corresponde a la solución de frecuencia 0, donde los tres coeficientes son iguales. La combinación lineal anterior expresa ya la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Solo falta determinar los valores de λ, μ y ν, resolviendo el sistema que nos da la condición del enunciado:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que implica resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos que $\lambda = -1/2$, $\mu = -1/6$, $\nu = -1/3$. Para terminar tomamos la parte real de $x(t)$ y desvelamos las trayectorias de las partículas.

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

R-Ejercicio 42 [Enunciado: página 42] Si la primera masa se mueve inicialmente con velocidad v y las otras dos están quietas, entonces el centro de masas se mueve con velocidad $v/3$. Si tomamos coordenadas que comparten este movimiento, la primera masa se mueve con velocidad $2v/3$ respecto del centro de masas y las otras con velocidad $-v/3$. Ahora escribimos el sistema como combinación lineal de soluciones de frecuencias definidas, como hicimos en el ejercicio anterior, y derivamos respecto del tiempo.

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathrm{i}\omega_0\lambda e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \sqrt{3}\mathrm{i}\omega_0\mu e^{-\mathrm{i}3\omega_0 t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ahora simplemente imponemos la condición $\dot{x}(0) = (2v/3,\ -v/3,\ -v/3)$ y resolvemos el sistema resultante:

$$\lambda = \frac{\mathrm{i}v}{2\omega_0}, \mu = \frac{\mathrm{i}v}{6\sqrt{3}\omega_0}.$$

El coeficiente ν puede tomar cualquier valor, pues depende solo de dónde se escoja el origen de coordenadas. Por simplicidad, supondremos que para esta solución $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, que da $\nu = 0$. Para volver al sistema de coordenadas inicial, sumamos la velocidad del centro de masas.

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathrm{i}v}{2\omega_0}e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}v}{6\sqrt{3}\omega_0}e^{-\mathrm{i}\sqrt{3}\omega_0 t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \frac{v}{3}t.$$

Para escribir las ecuaciones de las trayectorias, tomamos la parte real

$$\mathbf{x}(t) = \frac{v}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{v}{6\sqrt{3}\omega_0}\sin(\sqrt{3}\omega_0 t)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \frac{v}{3}t.$$

R-Ejercicio 43 [Enunciado: página 44] Partiendo de las ecuaciones del movimiento,

$$\ddot{x}_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2,$$
$$\ddot{x}_2 = \omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2,$$

podemos sumarlas y dividir entre dos para obtener

$$\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = -\omega_0^2 \frac{x_1 + x_2}{2},$$

o lo que es lo mismo,

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi.$$

Si en lugar de sumar las ecuaciones las restamos

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -3\omega_0^2 (x_2 - x_1),$$

que en términos de la variable $\eta = x_2 - x_1$ es

$$\ddot{\eta} = -3\omega^2 \eta.$$

R-Ejercicio 44 [Enunciado: página 45] Si $\mathbf{x}(t)$ representa un modo normal de frecuencia ω, entonces sus componentes tendrán la forma

$$x_n(t) = \hat{x}_n e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

de donde se sigue que

$$\ddot{x}_n(t) = -\omega^2 \hat{x}_n e^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

Sustituyendo en la ecuación matricial $m\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$,

$$-m\omega^2 \hat{\mathbf{x}} e^{-\mathrm{i}\omega t} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

equivalente a

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = m\omega^2 \hat{\mathbf{x}}.$$

Como $\omega^2 \hat{\mathbf{x}} = \omega^2 \mathbf{I}\hat{\mathbf{x}}$, podemos dejar ambos términos a la izquierda y sacar como factor común a $\hat{\mathbf{x}}$:

$$(\mathbf{K} - m\omega^2 \mathbf{I})\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{0}.$$

Para que haya soluciones aparte de la trivial, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, el sistema tiene que ser compatible indeterminado, es decir, el rango de la matriz $\mathbf{K} - m\omega^2 \mathbf{I}$ debe ser menor que N, que implica que su determinante se anula:

$$\det(\mathbf{K} - m\omega^2 \mathbf{I}) = 0.$$

R-Ejercicio 45 [Enunciado: página 45] Al sujetar con muelles los extremos de la cadena de tres osciladores, la matriz $\mathbf{K}$ se convierte en

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}.$$

Resolviendo la ecuación $\det(A - m\omega^2\mathbf{I}) = 0$,

$$(2k - m\omega^2)^3 - 2k^2(2k - m\omega^2) = (2k - m\omega^2)((2k - m\omega^2)^2 - 2k^2) = 0,$$

obtenemos las tres frecuencias de los modos normales:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{2}},\\ \omega_2 &= \omega_0\sqrt{2},\\ \omega_3 &= \omega_0\sqrt{2 + \sqrt{2}}.\end{aligned}$$

El movimiento del sistema se expresa como combinación lineal de los modos normales correspondientes a estas tres frecuencias.

$$\mathbf{x}(t) = \lambda e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} + \mu e^{-\mathrm{i}\omega_2 t}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \nu e^{-\mathrm{i}\omega_3 t}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Las condiciones iniciales del ejercicio 41 especifican que $\mathbf{x}(0) = (-1,\ 0,\ 0)$, que nos dejan con el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

Resolviendo, $\lambda = -1/4$, $\mu = -1/2$, $\nu = 1/4$. Sustituyendo en $x(t)$ y tomando la parte real,

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{4}\cos(\omega_1 t)\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t)\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\cos(\omega_3 t)\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

R-Ejercicio 46 [Enunciado: página 46] En primer lugar, habría que asegurarse de que la matriz $\mathbf{K} - m\omega_{F1}^2\mathbf{I}$ efectivamente tiene inversa, pero sabemos que sí es invertible porque si no lo fuera su determinante se anularía. Sin embargo, esto solo ocurre cuando ω_{F1} es igual a una de las frecuencias de los modos normales (que son precisamente las frecuencias para las que se anula el determinante), y hemos excluido esta posibilidad de entrada. Si la expresión de $x(t)$ dada en el enunciado es solución de la ecuación diferencial, debe ocurrir que la expresión

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = (m\ddot{\mathbf{x}}_H + \mathbf{K}\mathbf{x}_H) + (m\ddot{\mathbf{x}}_P + \mathbf{K}\mathbf{x}_P)$$

es igual a $\mathbf{F}$. El primer paréntesis se anula porque $\mathbf{x}_H$ satisface $m\ddot{\mathbf{x}}_H + \mathbf{K}\mathbf{x}_H = 0$. La derivada de $\mathbf{x}_P$ no es difícil de calcular, porque la matriz $\left(\mathbf{K} - m\omega_{F1}^2\mathbf{I}\right)^{-1}$ es independiente del tiempo, por lo que vemos que

$$\ddot{\mathbf{x}}_P = -\omega_{F1}^2\mathbf{x}_P.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} &= -m\omega_{F1}^2\mathbf{x}_P + \mathbf{K}\mathbf{x}_P \\ &= \left(\mathbf{K} - m\omega_{F1}^2\mathbf{I}\right)\mathbf{x}_P \\ &= \left(\mathbf{K} - m\omega_{F1}^2\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{K} - m\omega_{F1}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}. \end{aligned}$$

R-Ejercicio 47 [Enunciado: página 46] Como podemos escribir la forzante como suma de forzantes, la solución estacionaria es la suma de las soluciones estacionarias para cada una una de las forzantes por separado.

$$\mathbf{x}_P(t) = \sum_{j=1}^{N}\left(\mathbf{K} - m\omega_{Fj}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F}_j.$$

$\mathbf{F}_j$ representa el vector con todas las componentes nulas excepto la número j, que vale $F_j e^{\mathrm{i}\omega_{Fj}t}$. Nos aseguraremos sustituyendo la solución en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_P + \mathbf{K}\mathbf{x}_P &= \sum_{j=1}^{N} -m\omega_{F_j}^2\left(\mathbf{K} - m\omega_{Fj}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F}_j + \mathbf{K}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbf{K} - m\omega_{Fj}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F}_j \\ &= \sum_{j=1}^{N}\left(\mathbf{K} - m\omega_{Fj}^2\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{K} - m\omega_{Fj}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F}_j \\ &= \sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_j = \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Entre la primera y la segunda línea, hemos utilizado la distributividad de la suma para intercambiar el orden del sumatorio con $\mathbf{K}$, hemos unido las dos sumas y hemos sacado como factor común $\left(\mathbf{K} - m\omega_{Fj}^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{F}_j$.

R-Ejercicio 48 [Enunciado: página 46] Si $\mathbf{x}_P(t) = \hat{\mathbf{x}}_P e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$ es la solución estacionaria, tiene que cumplir

$$\left(\mathbf{K} - m\omega_F^2\mathbf{I}\right)\mathbf{x}_P = \mathbf{F},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 0 & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

porque $m\omega_F^2 = 2m\omega_0^2 = 2k$. Tenemos un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado, en el que $\hat{x}_2 = 1/k$ y $\hat{x}_1 = (2/k) - \hat{x}_3$. Por ejemplo, se comprueba facilmente que

$$\mathbf{x}_P(t) = \frac{e^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\omega_0 t}}{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que cumple estas condiciones, también satisface la ecuación diferencial. Sin embargo, si cambiamos la forzante,

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 0 & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

obtenemos un sistema incompatible, en el que la primera ecuación nos dice que $\hat{x}_2 = -1/k$, pero esto contradice a la última, que afirma que $\hat{x}_2 = -2/k$.

R-Ejercicio 49 [Enunciado: página 47] Buscamos las frecuencias de los modos normales, es decir, aquellas frecuencias, que llamaremos ω_1, ω_2, ..., ω_N, para las que existe una solución de la ecuación diferencial en la que todas las masas oscilan con la misma frecuencia. Sea $\mathbf{x}_j = \hat{\mathbf{x}}_j e^{-\mathrm{i}\omega_j t}$ uno de estos modos. Entonces debe satisfacer la ecuación

$$-m\omega_j^2 \hat{\mathbf{x}}_j - \mathrm{i}\omega_j \gamma \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{K} - (m\omega_j^2 + \mathrm{i}\omega_j\gamma)\mathbf{I}) = \mathbf{0}.$$

Ya hemos resuelto este problema cuando $\gamma = 0$. Simplemente, calculábamos los autovalores de la matriz $\mathbf{K}$ y los identificábamos con $m\omega_j^2$, pues esto nos daba los valores de las frecuencias que anulaban el determinante de la matriz $\mathbf{K} - m\omega_j^2\mathbf{I}$. Ahora tenemos que identificar los autovalores con $m\omega_j^2 + \mathrm{i}\omega_j\gamma$. Utilicemos λ_j para representar un autovalor de $\mathbf{K}$, entonces

$$m\omega_j^2 + \mathrm{i}\omega_j\gamma = \lambda_j.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado para ω,

$$\omega_j = \frac{\mathrm{i}\gamma}{2m} + \sqrt{\frac{\lambda_j}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}.$$

R-Ejercicio 50 [Enunciado: página 47] Sustituyendo directamente en la ecuación la solución propuesta en el enunciado,

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_P + \gamma\dot{\mathbf{x}}_P + \mathbf{K}\mathbf{x} &= (\mathbf{K} - (m\omega_F^2 + \mathrm{i}\omega_F\gamma)\mathbf{I})(\mathbf{K} - (m\omega_F^2 + \mathrm{i}\omega_F\gamma)\mathbf{I})^{-1}\hat{\mathbf{F}}e^{-\mathrm{i}\omega_F t} \\ &= \hat{\mathbf{F}}e^{-\mathrm{i}\omega_F t}, \end{aligned}$$

vemos que la solución es correcta siempre que exista la inversa $(\mathbf{K} - (m\omega_F^2 + \mathrm{i}\omega_F\gamma)\mathbf{I})^{-1}$. Ahora bien, sabemos que esta inversa tiene que existir porque ω_F es un número real y, sea cual sea su valor, no puede hacer que esta matriz tenga determinante nulo. La razón es que hemos calculado en el ejercicio anterior la forma de todas las frecuencias que hacen que se anule el determinante y siempre que $\gamma > 0$ la parte imaginaria de esas frecuencias es diferente de 0. Como ω_F es real, $\mathrm{Im}(\omega_F) = 0$ y difiere de todas las frecuencias de los modos normales.

Ondas

R-Ejercicio 51 [Enunciado: página 49] Desarrollando en serie,

$$\begin{aligned} \phi(x+h,\ t) =& \phi(x,t) + \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}h^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi(x,t)}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4\phi(x,t)}{\partial x^4}h^4 + \dots \\ \phi(x-h,\ t) =& \phi(x,t) - \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}h^2 \\ &- \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi(x,t)}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4\phi(x,t)}{\partial x^4}h^4 - \dots \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones,

$$\phi(x+h,\ t) + \phi(x+h,\ t) = 2\phi(x,t) + \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}h^2 + h^4\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\phi(x,t)}{\partial x^4} + \dots\right).$$

Despejando la segunda derivada de ϕ respecto de x,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\phi(x+h,\ t) + \phi(x+h,\ t) - 2\phi(x,t)}{h^2} + h^2\left(\frac{1}{12}\frac{\partial^4\phi(x,t)}{\partial x^4} + \dots\right).$$

Tomando a ambos lados el límite cuando h tiende a cero,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h,\ t) + \phi(x+h,\ t) - 2\phi(x,t)}{h^2}.$$

R-Ejercicio 52 [Enunciado: página 50] La fuerza sobre cada una de las masas sería

$$F_n = -2kx_n + kx_{n-1} + kx_{n+1},$$

escogiendo $x_0 = 0$ y $x_{N+1} = x_N$ para las condiciones en los bordes. Para que las masas estén en equlibrio, $F_n = 0$ excepto para $n = N$ porque F_N debe compensar la fuerza con la que estamos tirando del extremo. Queremos que $F_N = Kx_N$, así que

$$-2kx_{n-1} + kx_{n+1} + kx_n = 0,$$

para $n = 1,\ 2,\ \ldots, N-1$, y

$$-kx_N + kx_{N-1} = Kx_N.$$

La solución razonable en la que todas las masas se desplazan en la misma medida,

$$x_n = n\frac{x_N}{N},$$

resulta ser la correcta, como se puede comprobar sustituyendo directamente en las ecuaciones para $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$. Pero en la ecuación para x_N obtenemos

$$-kx_N + k(N-1)\frac{x_N}{N} = Kx_N,$$

que implica que $k = NK$.

R-Ejercicio 53 [Enunciado: página 52] Sustituyendo la solución en la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.$$

obtenemos

$$-A\omega^2\ \sin(\omega t)\ \sin(kx) = -c^2 Ak^2\ \sin(\omega t)\ \sin(kx),$$

que se cumple cuando $A = 0$ (es decir, cuando no hay vibración) o cuando se satisface la relación de dispersión $c = \pm\omega/k$. Debido a que la cuerda está sujeta por los extremos en $x = 0$ y $x = L$, deducimos que

$$y(0,t) = 0,$$
$$y(L,t) = 0.$$

La primera de estas condiciones se cumple automáticamente, pero para que se cumpla la segunda, es necesario que $k = \pi n/L$, siendo n un número entero

arbitrario, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Debido a la relación de dispersión esto implica a su vez que las frecuencias deben ser $\omega = c\pi n/L$.

R-Ejercicio 54 [Enunciado: página 53] Simplemente tomamos la parte real y utilizamos la relación trigonométrica $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{A}{2}e^{-\mathrm{i}(\omega t - kx)} - \frac{A}{2}e^{-\mathrm{i}(\omega t + kx)}\right) \\ &= \frac{A}{2}\left(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right) \\ &= \frac{A}{2}\left(\cos(\omega t)\cos(kx) + \sin(\omega t)\sin(kx)\right. \\ &\qquad \left. - \cos(\omega t)\cos(kx) + \sin(\omega t)\sin(kx)\right) \\ &= A\sin(\omega t)\sin(kx). \end{aligned}$$

Por cierto, si te cuesta recordar identidades trigonométricas como la que he utilizado, muchas se derivan fácilmente utilizando la función exponencial compleja. Por ejemplo, la exponencial cumple la propiedad de que

$$e^{\mathrm{i}(a+b)} = e^{\mathrm{i}a}e^{\mathrm{i}b}.$$

Aplicando la identidad de Euler a ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b) &= (\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a))(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) \\ &\quad + \mathrm{i}(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)). \end{aligned}$$

Tomando las partes real e imaginaria, obtenemos las identidades

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b). \end{aligned}$$

R-Ejercicio 55 [Enunciado: página 53] De nuevo, no hay más que sustituir la solución en la ecuación de ondas

$$-A\omega^2\ \cos(\omega t)\ \sin(kx) = -c^2An^2\pi^2\frac{x^2}{L^2}\ \cos(\omega t)\ \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right),$$

que cumple las condiciones en los extremos cuando $\omega = \pm cn\pi/L$. En cuanto a la solución más general,

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{A+\mathrm{i}B}{2}e^{-\mathrm{i}(\omega t+kx)} - \frac{A+\mathrm{i}B}{2}e^{-\mathrm{i}(\omega t-kx)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left((A+\mathrm{i}B)e^{-\mathrm{i}\omega t}\frac{e^{-\mathrm{i}kx}-e^{\mathrm{i}kx}}{2}\right). \end{aligned}$$

Utilizando ahora la definición

$$\sin(kx) = \frac{e^{\mathrm{i}kx}-e^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}},$$

podemos simplificar la expresión.

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left(-(A+\mathrm{i}B)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{i}\sin(kx)\right).$$

Ahora utilizamos la identidad de Euler,

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left(-(A+\mathrm{i}B)(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t))\mathrm{i}\sin(kx)\right),$$

y finalmente expandimos y tomamos la parte real

$$y(x,t) = (A\ \sin(\omega t) + B\ \cos(\omega t))\sin(kx).$$

R-Ejercicio 56 [Enunciado: página 55] Conocemos las soluciones de la ecuación de ondas, pero tenemos que escoger combinaciones que satisfagan las condiciones de contorno

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

En lugar de necesitar que la función $y(x,t)$ se anule en $x = 0$ y $x = L$, necesitamos que se anulen sus derivadas, así que una buena apuesta consiste en sustituir el $\sin(kx)$ por $\cos(kx)$. Podemos conseguir un coseno cambiando el signo en la superposición del ejercicio 54.

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \mathrm{Re}\left((A+\mathrm{i}B)\frac{e^{-\mathrm{i}(\omega t+kx)}+e^{-\mathrm{i}(\omega t-kx)}}{2}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left((A+\mathrm{i}B)e^{-\mathrm{i}\omega t}\cos(kx)\right) \\ &= (A\ \cos(\omega t) + B\ \sin(\omega t))\cos(kx). \end{aligned}$$

Como antes, $k = n\pi/L$ y $\omega = cn\pi/L$, siendo n un número entero cualquiera. La derivada de y respecto de x es

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(A\ \cos\left(cn\pi\frac{t}{L}\right) + B\ \sin\left(cn\pi\frac{t}{L}\right)\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right),$$

que se anula tanto en $x = 0$ como $x = L$.

R-Ejercicio 57 [Enunciado: página 56] La derivación se parece a la de las ondas de cizalla que vimos anteriormente. La fuerza sobre una lámina horizontal de fluido de anchura Δz a la altura z_0 será

$$F = A\eta\left(\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=z_0+\Delta z} - \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=z_0}\right).$$

En lugar de expresar la aceleración como la segunda derivada de la posición, la escribimos como derivada de la velocidad,

$$F = \rho A\Delta z\ \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Igualando las dos expresiones de la fuerza, dividiendo por Δz y tomando el límite cuando Δz tiende a cero, obtenemos la ecuación diferencial en derivadas parciales.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

R-Ejercicio 58 [Enunciado: página 56] Supongamos que la solución se puede escribir como producto de una función que depende solo de la posición y otra que depende solo del tiempo.

$$v(z,t) = u(z)T(t).$$

Sustituyendo en la ecuación, la convertimos en

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Para que dos funciones de variables diferentes puedan igualarse entre sí, tendrán que ser iguales a la misma constante, que llamaremos λ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho\lambda}{\eta}u,$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda T.$$

Resolviendo,

$$u(z) = A\ e^{-kz} + B\ e^{kz},$$
$$T(t) = C\ e^{-\lambda t} + D\ e^{\lambda t},$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{\rho\lambda}{\eta}}.$$

Por lo tanto,

$$v(z,t) = \left(A\ e^{kz} + B\ e^{-kz}\right)\left(C\ e^{-\lambda t} + D\ e^{\lambda t}\right).$$

R-Ejercicio 59 [Enunciado: página 56] En la solución anterior, escogemos $A = -B = E/2$ y $k = \mathrm{i}\kappa$.

$$\begin{aligned} v(z,t) &= E\ \left(\frac{e^{\mathrm{i}\kappa z} - e^{-\mathrm{i}\kappa z}}{2}\right)\left(C\ e^{-\lambda t} + D\ e^{\lambda t}\right) \\ &= E\ \sin(\kappa z)\left(C\ e^{-\lambda t} + D\ e^{\lambda t}\right). \end{aligned}$$

Hay que recordar la relación entre k y λ, que implica que

$$k = \mathrm{i}\kappa = \sqrt{\frac{\rho\lambda}{\eta}},$$

de donde obtenemos que

$$\lambda = -\frac{\kappa^2\eta}{\rho}.$$

Ahora bien, si ponemos $C \neq 0$, obtenemos soluciones con velocidades que crecen exponencialmente. Por motivos físicos, descartamos estas soluciones imponiendo $C = 0$. Por último, $D = 1$ para dar una función

$$v(z,t) = E\ \sin(\kappa z)e^{-\frac{\kappa^2\eta}{\rho}t},$$

que coincide con la expresión del enunciado cuando $t = 0$. Vemos que las velocidades iniciales simplemente decaen exponencialmente con el tiempo.

R-Ejercicio 60 [Enunciado: página 56] Únicamente tenemos que ajustar la solución del ejercicio 58 a las condiciones de contorno apropiadas. En primer lugar, en el fondo ($z = 0$) el agua se mueve con frecuencia ω_F. Como de costumbre, escogemos

$$v(0,t) = u_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t},$$

para quedarnos después con la parte real o la parte imaginaria. Podemos cumplir con esta condición tomando $D = 0$, $C = u_0$ y $\lambda = \mathrm{i}\omega_F$, de donde obtenemos un campo de velocidades de la forma

$$v(z,t) = u_0 \left(Ae^{kz} + Be^{-kz}\right) e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Segundo, aplicando la condición

$$k = \sqrt{\frac{\rho\lambda}{\eta}} = (1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}}.$$

y sabiendo que el agua está en reposo lejos del fondo,

$$\lim_{z\to\infty} v(z,t) = 0,$$

tomamos $A = 0$ (porque si $\mathrm{Re}(k) > 0$, las velocidades aumentan sin límite al elevarnos sobre el fondo) y $B = 1$, que nos deja con

$$v(z,t) = u_0 e^{(-1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta}}z} e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Definiendo la longitud

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho\omega}},$$

y tomando la parte real, llegamos finalmente al campo de velocidades oscilante

$$\begin{aligned} v(z,t) &= \mathrm{Re}\left(u_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-\mathrm{i}\left(\frac{z}{\delta}+\omega_F t\right)}\right) \\ &= e^{-\frac{z}{\delta}}\left(\mathrm{Re}(u_0)\cos\left(\frac{z}{\delta}+\omega_F t\right) + \mathrm{Im}(u_0)\sin\left(\frac{z}{\delta}+\omega_F t\right)\right). \end{aligned}$$

Como se puede ver, la amplitud de la velocidad decae exponencialmente con la altura. Si u_0 no es muy grande, entonces las vibraciones se vuelven inapreciables en cuanto la altura es algo mayor que δ.

R-Ejercicio 61 [Enunciado: página 58] Tomamos primero la tercera ecuación

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

y tomamos su rotacional

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}).$$

Aplicando el teorema del enunciado,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}).$$

El primer término se anula por la primera ecuación de Maxwell. Utilizamos la última de las ecuaciones para escribir (cambiando el signo a los dos lados)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Con el campo magnético, llevamos a cabo un razonamiento parecido. Empezando con la cuarta ecuación

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

tomamos el rotacional

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}),$$

aplicamos el teorema, la segunda ecuación de Maxwell, la tercera y cambiamos el signo

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

R-Ejercicio 62 [Enunciado: página 59] Dando por sentado que la solución tiene la forma

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t),$$

la sustituimos en la ecuación y escribimos en lados opuestos las funciones de variables diferentes

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \mathrm{i}\hbar\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Podemos separar la ecuación en dos, igualando cada lado a la constante ω

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{\hbar}\phi,$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{2m\omega}{\hbar}\psi.$$

Sabemos resolver ambas ecuaciones

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\hbar}t},$$
$$\psi(x) = \psi_0 e^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x}.$$

Por tanto, la ecuación de Schrödinger admite soluciones de la forma

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x}e^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\hbar}t}.$$

Una brevísima introducción a las series de Fourier

R-Ejercicio 63 [Enunciado: página 60] No hay más que repetir el razonamiento del ejercicio 4, pero para una condición inicial arbitraria. Las condiciones

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x(0)) &= \mathrm{Re}\left(x_0 e^{-\mathrm{i}\omega 0}\right) = a,\\ \mathrm{Re}(\dot{x}(0)) &= \mathrm{Re}\left(-\mathrm{i}\omega x_0 e^{-\mathrm{i}\omega 0}\right) = b,\end{aligned}$$

implican que

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(x(0)) &= \mathrm{Re}(x_0) = a,\\ \mathrm{Re}(\dot{x}(0)) &= \mathrm{Re}(-\mathrm{i}\omega x_0) = b,\end{aligned}$$

es decir, $x_0 = a + \mathrm{i}\frac{b}{\omega}$, sean cuales sean a y b.

R-Ejercicio 64 [Enunciado: página 60] Para tener una base en tres dimensiones, necesitamos tres vectores linealmente independientes. Una manera sencilla de comprobarlo es colocar los vectores en una matriz y tomar el determinante. Si es diferente de cero, entonces son linealmente independientes. Para el ejercicio 38,

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -6.$$

Con los vectores del ejercicio 47,

$$\begin{vmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{vmatrix} = -4\sqrt{2}.$$

R-Ejercicio 65 [Enunciado: página 61] Sí. El razonamiento es parecido al del ejercicio 63. Llamaremos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2, \ldots,$ $\mathbf{u_N}$ a los vectores correspondientes a las frecuencias ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_N de los modos normales. Si forman una base, podemos expresar cualquier otro vector del espacio en función de ellos. Si tenemos una cadena de osciladores con un movimiento descrito por

$$\mathbf{x}(t) = a_1 u_1 e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + a_2 u_2 e^{-\mathrm{i}\omega_2 t} + \ldots + a_N u_N e^{-\mathrm{i}\omega_N t},$$

y queremos que cumpla las condiciones iniciales $\mathrm{Re}(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{A}$ y $\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{x}}(0)) = \mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores cualesquiera, entonces los escribimos primero en función de los vectores de la base,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_N u_N,\\ \mathbf{B} &= \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \ldots + \nu_N u_N.\end{aligned}$$

Después, escribimos los coeficientes a_i como $a_n = \mu_n + \mathrm{i}\frac{\nu_n}{\omega_n}$ y esto nos deja con la solución particular

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mu_1 + \mathrm{i}\frac{\nu_1}{\omega_1}\right) u_1 e^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + \left(\mu_2 + \mathrm{i}\frac{\nu_2}{\omega_2}\right) u_2 e^{-\mathrm{i}\omega_2 t} + \ldots + \left(\mu_N + \mathrm{i}\frac{\nu_N}{\omega_N}\right) u_N e^{-\mathrm{i}\omega_N t}.$$

Tomando la parte real de $\mathbf{x}(0)$, vemos que

$$\mathrm{Re}(\mathbf{x}(0)) = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_N u_N = \mathbf{A}.$$

Derivando $\mathbf{x}(t)$ respecto del tiempo y tomando la parte real de $\dot{\mathbf{x}}(t)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{x}}(0)) = \mathrm{Re}\Bigg(&-\mathrm{i}\omega_1\left(\mu_1 + \mathrm{i}\frac{\nu_1}{\omega_1}\right) u_1 - \mathrm{i}\omega_2\left(\mu_2 + \mathrm{i}\frac{\nu_2}{\omega_2}\right) u_2 + \ldots\\ &-\mathrm{i}\omega_N\left(\mu_N + \mathrm{i}\frac{\nu_N}{\omega_N}\right) u_N\Bigg)\\ = \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \ldots + \nu_N u_N &= \mathbf{B}.\end{aligned}$$

R-Ejercicio 66 [Enunciado: página 62] Solo hay que calcular el producto escalar. Para los vectores del ejercicio 38,

$$\begin{aligned}\langle(1,0,-1),(1,-2,1)\rangle &= 1\cdot 1 + (0\cdot -2) + (-1\cdot 1) = 0,\\ \langle(1,0,-1),(1,1,1)\rangle &= 1 + 0 - 1 = 0,\\ \langle(1,-2,1),(1,1,1)\rangle &= 1 - 2 + 1 = 0.\end{aligned}$$

Para los del ejercicio 45,

$$\begin{aligned}\langle(1,\sqrt{2},1),(1,0,-1)\rangle &= 1 + 0 - 1 = 0,\\ \langle(1,\sqrt{2},1),(1,-\sqrt{2},1)\rangle &= 1 - 2 + 1 = 0,\\ \langle(1,0,-1),(1,-\sqrt{2},1)\rangle &= 1 + 0 - 1 = 0.\end{aligned}$$

R-Ejercicio 67 [Enunciado: página 62] Para las dos primeras, utilizamos las propiedades 1–3.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle &= \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle &= \overline{\langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{u}\rangle} \\ &= \overline{\lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle} \\ &= \bar{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle.\end{aligned}$$

Por último, según la definición de la norma,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_N|^2}.$$

Los términos dentro de la raíz son números reales elevados al cuadrado, que solo pueden dar un resultado nulo cuando sean nulos todos. Esto quiere decir que los números complejos x_n tienen módulo igual a cero, pero esto ocurre solo cuando $x_n = 0$.

R-Ejercicio 68 [Enunciado: página 62] Como $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ y todos los elementos son reales, se deduce que $\mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}$. En consecuencia,

$$\langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = (\mathbf{K}\mathbf{u})^\dagger \mathbf{v} = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{K}^\dagger \mathbf{v} = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{K}\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{K}\mathbf{v}\rangle.$$

R-Ejercicio 69 [Enunciado: página 62] Los autovectores $\mathbf{v}_n$ de $\mathbf{K}$ cumplen

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_n = \lambda \mathbf{v}_n.$$

Como vimos en el ejercicio anterior, $\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{K}\mathbf{v}_m\rangle = \langle \mathbf{K}\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m\rangle$, pero esto implica que $\lambda_m\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m\rangle = \bar{\lambda}_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m\rangle$. LLevando todos los términos a la izquierda y sacando factor común, $(\lambda_m - \bar{\lambda}_n)\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m\rangle = 0$. Cuando $n = m$, obtenemos $(\lambda_n - \bar{\lambda}_n)\|\mathbf{v}_n\| = 0$. Como $\mathbf{v}_n$ no puede ser un vector nulo, $\|\mathbf{v}_n\| > 0$ y la única posibilidad es que $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, es decir, que λ_n sea real (sea cual sea n). Esto permite quitar la barra de conjugación en la ecuación para $n \neq m$ y escribir $(\lambda_m - \bar{\lambda}_n)\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m\rangle = 0$. Como el paréntesis no puede ser nulo, se sigue que $\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_m\rangle = 0$. Al no ser nulos $\mathbf{v}_n$ ni $\mathbf{v}_m$, llegamos a la conclusión de que son perpendiculares.

R-Ejercicio 70 [Enunciado: página 62] Primero hay que señalar que $\mathbf{K}$ es una matriz simétrica debido a la tercera ley de Newton. Si existe acoplamiento entre las coordenadas x_n y x_m entonces la ecuación para x_n contendrá el término $-k(x_n - x_m)$ y, por la ley de acción y reacción, la ecuación para x_m contendrá el término $-k(x_m - x_n)$. Esto nos lleva a que los términos k_{nm} y k_{mn} de la matriz $\mathbf{K}$ deben ser iguales. Si ahora aplicamos el cambio de variables del enunciado a las ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m_1}\ddot{x}'_1 \\ \sqrt{m_2}\ddot{x}'_2 \\ \vdots \\ \sqrt{m_N}\ddot{x}'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x'_1}{\sqrt{m_1}} \\ \frac{x'_2}{\sqrt{m_2}} \\ \vdots \\ \frac{x'_N}{\sqrt{m_N}} \end{pmatrix}$$

Definamos la matriz

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{m_N} \end{pmatrix},$$

que nos permite escribir el sistema de ecuaciones en la forma

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{K}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'.$$

Multiplicando a ambos lados por $\mathbf{S}^{-1}$,

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{K}'\mathbf{x}',$$

con una matriz simétrica

$$\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} \frac{k_{11}}{m_1} & \frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} & \dots & \frac{k_{1N}}{\sqrt{m_1 m_N}} \\ \frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_{22}}{m_2} & \dots & \frac{k_{2N}}{\sqrt{m_2 m_N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k_{1N}}{\sqrt{m_1 m_N}} & \frac{k_{2N}}{\sqrt{m_2 m_N}} & \dots & \frac{k_{NN}}{m_N} \end{pmatrix}.$$

R-Ejercicio 71 [Enunciado: página 65]

1. $\langle f, g\rangle = \int \overline{f(x)} g(x)\, dx = \int \overline{\overline{g(x)} f(x)}\, dx = \overline{\int \overline{g(x)} f(x)\, dx} = \overline{\langle g, f\rangle}$.
2. $\langle f, g+h\rangle = \int \overline{f(x)}(g(x)+h(x))\, dx = \int \overline{f(x)} g(x)\, dx + \int \overline{f(x)} h(x)\, dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$.

3. $\langle f, \lambda g\rangle = \int \overline{f(x)}\lambda g(x)\ dx = \lambda \int \overline{f(x)} g(x)\ dx = \lambda\langle f, g\rangle$.

4. $\|f\| = \sqrt{\int \overline{f(x)} f(x)\ dx} = \sqrt{\int |f(x)|^2\ dx} \geq 0$, porque $|f(x)|^2$ es un número real positivo para todo valor de x.

R-Ejercicio 72 [Enunciado: página 66] De acuerdo con la definición de norma,

$$\|y_n(x,0)\| = \sqrt{\langle y_n(x,0), y_n(x,0)\rangle}.$$

En términos de integrales,

$$\|y_n(x,0)\|^2 = \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx.$$

Para resolver esta integral, la estrategia habitual consiste en utilizar las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1,\\ \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) &= \cos(2\theta),\end{aligned}$$

para expresar el cuadrado del seno de la siguiente forma:

$$\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right).$$

Ahora la integral es fácil de hacer.

$$\begin{aligned}\|y_n(x,0)\|^2 &= \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\ dx\\ &= \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2n\pi}\right]_0^L\\ &= \frac{L}{2},\end{aligned}$$

por lo que $\|y_n(x,0)\| = \sqrt{L/2}$.

R-Ejercicio 73 [Enunciado: página 67]

$$\begin{aligned}
\left\langle \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right\rangle &= -\int_0^L 2\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}\right) 2\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}\frac{m\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}\frac{m\pi}{L}x}\right)\, dx \\
&= 4\int_0^L \left(e^{\mathrm{i}(n+m)\frac{\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}(n+m)\frac{\pi}{L}x}\right)\, dx \\
&\quad + 4\int_0^L \left(e^{\mathrm{i}(n-m)\frac{\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}(n-m)\frac{\pi}{L}x}\right)\, dx \\
&= \frac{\mathrm{i}4L}{(n+m)\pi}\left[\left(e^{\mathrm{i}(n+m)\frac{\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}(n+m)\frac{\pi}{L}x}\right)\right]_0^L \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}4L}{(n-m)\pi}\left[\left(e^{\mathrm{i}(n-m)\frac{\pi}{L}x} - e^{-\mathrm{i}(n-m)\frac{\pi}{L}x}\right)\right]_0^L \\
&= \frac{\mathrm{i}4L}{(n+m)\pi}\left[2\mathrm{i}\,\sin\left((n+m)\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}4L}{(n-m)\pi}\left[2\mathrm{i}\,\sin\left((n-m)\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L = 0.
\end{aligned}$$

R-Ejercicio 74 [Enunciado: página 68] La expresión de los coeficientes a_n en términos del producto escalar queda

$$a_n = \frac{\langle y_n, y\rangle}{\|y_n\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L \overline{y(x,0)} y_n(x,0)\, dx.$$

Podemos dividir la integral en dos,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\left(\int_0^{\frac{L}{2}} \overline{y_n(x,0)} y(x,0)\, dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \overline{y_n(x,0)} y(x,0)\, dx\right) \\
&= \frac{4h}{L}\left(\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} x\overline{y_n(x,0)}\, dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \left(1 - \frac{1}{L}x\right)\overline{y_n(x,0)}\, dx\right),
\end{aligned}$$

e integrar por partes. Calculemos primero la integral indefinida

$$\begin{aligned}
\int x\, y_n(x,0)\, dx &= \int x\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \\
&= -\frac{xL}{n\pi}\, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi}\int \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx \\
&= -\frac{xL}{n\pi}\, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}$$

Ahora separamos el cálculo de a_n en las tres integrales

$$\begin{aligned}
\frac{4h}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{L} x y_n(x,0)\ dx &= \frac{4h}{L^2}\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx \\
&= \frac{4h}{L^2}\left[-\frac{xL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{4h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2h}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \\
\frac{4h}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} y_n(x,0)\ dx &= \frac{4h}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{\frac{L}{2}}^{L} \\
&= \frac{4h}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right) \\
&= \frac{4h}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right), \\
-\frac{4h}{L^2}\int_{\frac{L}{2}}^{L} x\ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx &= \frac{4h}{L^2}\left[\frac{xL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{\frac{L}{2}}^{L} \\
&= (-1)^n\frac{4h}{n\pi} - \frac{2h}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4h}{n^2 pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

El coeficiente a_n será la suma de estas tres integrales.

R-Ejercicio 75 [Enunciado: página 69] Nada más fácil. Cuando $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}, e^{-\mathrm{i}\frac{2m\pi}{L}x}\right\rangle &= \int_0^L e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x} e^{-\mathrm{i}\frac{2m\pi}{L}x}\ dx \\
&= \int_0^L e^{\mathrm{i}\frac{2(n-m)\pi}{L}x}\ dx \\
&= \frac{\mathrm{i}L}{2(n-m)\pi}\left[e^{\mathrm{i}\frac{2(n-m)\pi}{L}x}\right]_0^L \\
&= \frac{\mathrm{i}L}{2(n-m)\pi}(1-1) = 0.
\end{aligned}$$

En cuanto a la norma,

$$\left\|e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\right\|^2 = \int_0^L \left|e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\right|^2\ dx = \int_0^L 1\ dx = L,$$

por lo que

$$\left\|e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\right\| = \sqrt{L}.$$

R-Ejercicio 76 [Enunciado: página 69] Con el truco habitual para calcular los coeficientes,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L}\left\langle e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}, y(x,0)\right\rangle \\ &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x} y(x,0)\ dx. \end{aligned}$$

Para las condiciones iniciales $y(x,0)$ que nos interesan ahora, podemos separar la integral en tres partes.

$$c_n = \frac{h}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\ dx + \frac{2h}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} x\ e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\ dx - \frac{2h}{L^2}\int_{0}^{\frac{L}{2}} x\ e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\ dx.$$

La primera integral se anula,

$$\frac{h}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\ dx = \frac{h}{2n\pi\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = 0,$$

y las otras dos se pueden reescribir en términos de la función coseno. Cambiando de variable de x a $-x$ en la última integral e invirtiendo el orden de los límites de integración,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2h}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} xe^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\ dx + \frac{2h}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} xe^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{L}x}\ dx \\ &= \frac{4h}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{0} x\ \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\ dx, \end{aligned}$$

que podemos integrar fácilmente por partes.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2h}{n\pi L}\left[x\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{0} - \frac{2h}{n\pi L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\ dx \\ &= \frac{h}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{0} \\ &= \frac{h}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi)) \\ &= \frac{h}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n). \end{aligned}$$

Es decir,

$$c_n = \begin{cases} \frac{2h}{n^2\pi^2}, & \text{n impar,} \\ 0, & \text{n par.} \end{cases}$$

R-Ejercicio 77 [Enunciado: página 70] Sustituyendo $y(x,t) = Y(x)T(t)$ en la ecuación diferencial, resulta

$$Y\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + Y\ \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial T}{\partial t} = c^2\ T\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}.$$

Dividiendo a ambos lados entre $c^2\ Y(x)\ T(t)$,

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2 T}\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}.$$

Para que se cumpla la identidad, ambos lados deben ser iguales al mismo valor constante, que llamaremos k^2,

$$\frac{1}{c^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2 T}\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial T}{\partial t} = k^2,$$
$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = k^2,$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial T}{\partial t} - c^2 k^2 T = 0,$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - k^2 Y = 0.$$

R-Ejercicio 78 [Enunciado: página 72] La función evidentemente tiene periodo $T = 1$, luego

$$c_n = \int_0^1 e^{\mathrm{i}2\pi n t}\ t\ dt,$$

que se puede integrar por partes cuando $n \neq 0$.

$$\begin{aligned} c_n &= \left[\frac{e^{\mathrm{i}2\pi n t}}{2\mathrm{i}\pi n}\ t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}2\pi n t}}{2\mathrm{i}\pi n}\ dt \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2\pi n} + \left[\frac{e^{\mathrm{i}2\pi n t}}{4\pi^2 n^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2\pi n}. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, la integral se simplifica a

$$c_0 = \int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}.$$

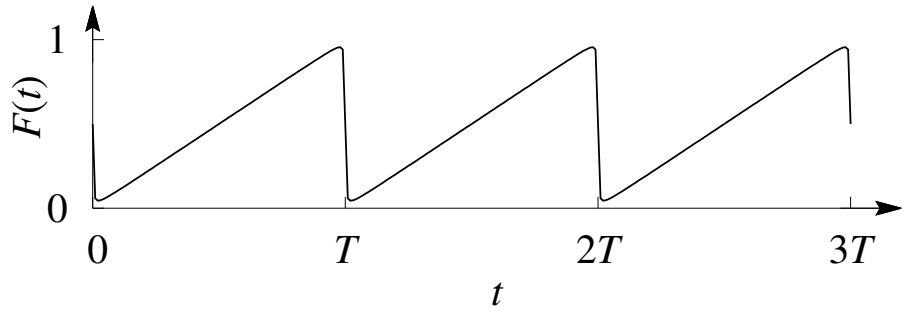


Figura 21: Aproximación de la forzante $F(t) = t - \lfloor t \rfloor$ mediante $\mathbf{F}(t) \approx \sum_{n=-N}^{N} c_n \; e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t}$, con $N = 100$.

La figura 21 muestra el resultado de sumar los 201 mayores términos de la serie de Fourier.

R-Ejercicio 79 [Enunciado: página 73] En el ejercicio 11 aprendimos la solución estacionaria para la forzante $F(t) = F_0 e^{-\mathrm{i}\omega_F t}$:

$$x(t) = \frac{F_0}{k - m\omega_F^2 - \mathrm{i}\omega_F \gamma} e^{-\mathrm{i}\omega_F t}.$$

Ahora tenemos una función $F(t)$ escrita como una suma de fasores,

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}_n \; e^{-\mathrm{i}\omega_n t}, = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \; e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t},$$

donde la amplitud de cada fasor

$$\hat{F}_n = c_n = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}, & n \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & n = 0, \end{cases}$$

y las frecuencias forzantes cumplen $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$. La solución estacionaria se construye sumando las soluciones correspondientes a cada frecuencia ω_n, consideradas por separado (como vimos en el ejercicio 13).

$$x(t) = \frac{1}{2k} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n \; (k - m\omega_n^2 - \mathrm{i}\omega_n \gamma)} \; e^{-\mathrm{i}\omega_n t}.$$

Llamemos q_n a los coeficientes que acompañan a cada exponencial.

$$q_n = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n \; (k - m\omega_n^2 - \mathrm{i}\omega_n \gamma)} & n \neq 0, \\ \frac{1}{2k}, & n = 0. \end{cases}$$

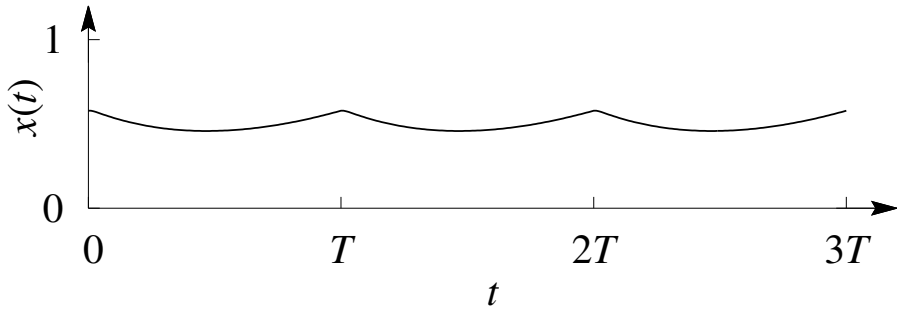


Figura 22: Estado estacionario del oscilador armónico amortiguado y forzado con $F(t) = t - \lfloor t \rfloor$ ($m = 0{,}01$, $k = 1$, $\gamma = 1$).

Como $q_n = \bar{q}_{-n}$, podemos combinar los términos n y $-n$ (cuando $n \neq 0$),

$$\begin{aligned} q_n\ e^{-\mathrm{i}\omega_n t} + q_{-n}\ e^{-\mathrm{i}\omega_{-n} t} &= q_n\ e^{-\mathrm{i}\omega_n t} + \overline{q_n\ e^{-\mathrm{i}\omega_n t}} \\ &= 2\ \mathrm{Re}\left(q_n\ e^{-\mathrm{i}\omega_n t}\right) \\ &= \frac{(k - m\omega_n^2)\ \sin(\omega_n t) - \omega_n \gamma\ \cos(\omega_n t)}{\pi n\ ((k - m\omega_n^2)^2 + \omega_n^2 \gamma^2)}. \end{aligned}$$

La expresión final de la trayectoria será entonces

$$x(t) = \frac{1}{2k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k - m\omega_n^2)\ \sin(\omega_n t) - \omega_n \gamma\ \cos(\omega_n t)}{\pi n\ ((k - m\omega_n^2)^2 + \omega_n^2 \gamma^2)},$$

que he utilizado para generar la figura 22.

R-Ejercicio 80 [Enunciado: página 74] De acuerdo con la definición de transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi \mathrm{i} \nu t}\ \mathrm{rect}(t)\ dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi \mathrm{i} \nu t}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i} \nu} \left[e^{2\pi \mathrm{i} \nu t}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi \nu 2\mathrm{i}} \left[e^{\mathrm{i}\pi\nu} - e^{-\mathrm{i}\pi\nu}\right] \\ &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \mathrm{sinc}(\pi\nu). \end{aligned}$$

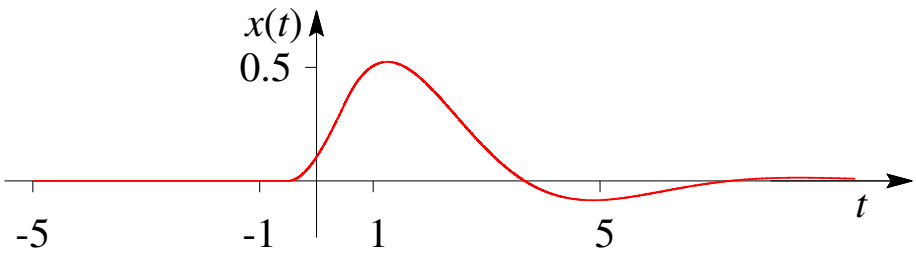


Figura 23: Trayectoria del oscilador amortiguado con $m = 1$, $k = 1$ y $\gamma = 1$, en reposo para $t < \frac{1}{2}$, y forzado con $F(t) = \text{rect}(t)$.

La función $\sin(x)/x$ aparece tan habitualmente en el análisis de señales que se le ha dado el nombre de $\text{sinc}(x)$ para abreviar las fórmulas.

Para escribir la solución particular, utilizamos otra vez la estrategia de superponer las soluciones para los fasores de distintas frecuencias considerados por separado, es decir, como

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi\nu)\ e^{-\text{i}2\pi\nu t}\ d\nu,$$

la trayectoria del oscilador será

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(\pi\nu)}{k - m(2\pi\nu)^2 - \text{i}2\pi\nu\gamma}\ e^{-\text{i}2\pi\nu t}\ d\nu.$$

Pregunté sobre la integral anterior a un programa de matemática computacional, que me reveló una solución muy compleja en términos de funciones especiales que no estoy dispuesto a comprobar. Como sentía curiosidad sobre la forma de $x(t)$, escribí un pequeño programa que calculaba numéricamente la trayectoria y la he representado en la figura 23.