Variable Compleja

(Funciones y Derivación)

Juan Miguel Suay Belenguer


TareasPlus

Certificado

de completación

Juan Miguel Suay Belenguer

Ha completado el curso de
Variable Compleja para métodos matemáticos
con una duración de 29 horas y 175 lecciones en video

HERNAN JARAMILLO • CEO y Fundador

Tareasplus confirma
la validez de este certificado
Febrero 18 de 2019

ROBERTO CUARTAS • Jefe Académico y Fundador

Primera edición 2019

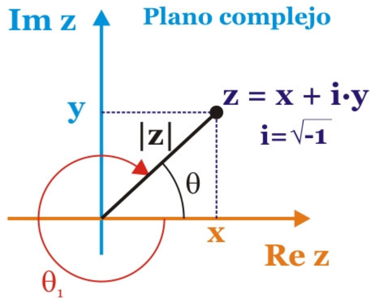
ISBN 978-0-244-18989-1

Juan Miguel Suay Belenguer
c/ El de Pagan, 44 – 03550 – San Juan de Alicante (Alicante) – España.
jm_suay@yahoo.com
Tel.: 630 977 841

Variable Compleja (I)

Operaciones elementales y propiedades

Formas de representar a un complejo



$$z = x + i\cdot y$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{módulo}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{argumento}$$

θ **argumento positivo**

θ_1 **argumento negativo**

$$\begin{cases} x = |z|\cdot\cos\theta \\ y = |z|\cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$z = |z|\cdot\cos\theta + i\cdot|z|\cdot\operatorname{sen}\theta$$

$$z = |z|\cdot e^{i\cdot\theta} \qquad \textbf{Forma polar}$$

$$\arg(z) = \theta + 2\cdot n\cdot\pi$$

Argumento principal Arg (z)

$$\operatorname{Arg}(z) = \theta \in (-\pi, \pi]$$

Si $\theta < -\pi$ se le suma 2π
Si $\theta > \pi$ se le resta 2π

Operaciones básicas

$$z_1 = x_1 + i\cdot y_1$$

$$z_2 = x_2 + i\cdot y_2$$

$$z_1 = |z_1|\cdot e^{i\cdot\theta_1}$$

$$z_2 = |z_2|\cdot e^{i\cdot\theta_2}$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i\cdot(y_1 \pm y_2)$$

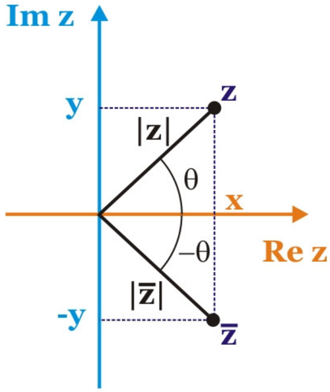
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2) + i\cdot(y_1\cdot x_2 + x_1\cdot y_2) \qquad z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i\cdot(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right] + i\cdot\left[\frac{y_1\cdot x_2 - x_1\cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right] \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot e^{i\cdot(\theta_1-\theta_2)} \qquad z_2 \neq 0$$

$$\left(|z|\cdot e^{i\cdot\theta}\right)^n = |z|^n\cdot e^{i\cdot\theta\cdot n} \qquad (\cos\theta + i\cdot\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\cdot\theta) + i\cdot\operatorname{sen}(n\cdot\theta)$$

Identidad de Moivre

Variable Compleja (II)



Conjugado de un complejo

$$z = x + i\cdot y \rightarrow \overline{z} = x - i\cdot y$$

Propiedades

1) $|z| = |\overline{z}|$ 2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$ 3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

Propiedades del módulo

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $z_2 \neq 0$ 3) $|z^n| = |z|^n$

Desigualdades triangulares

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|$ 2) $|z_1 + z_2| \geq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|$

Definición de sen θ y cos θ

$$\cos\theta = \frac{e^{i\cdot\theta} + e^{-i\cdot\theta}}{2} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\cdot\theta} - e^{-i\cdot\theta}}{2\cdot i}$$

Variable Compleja (III)

Raíz de un número complejo

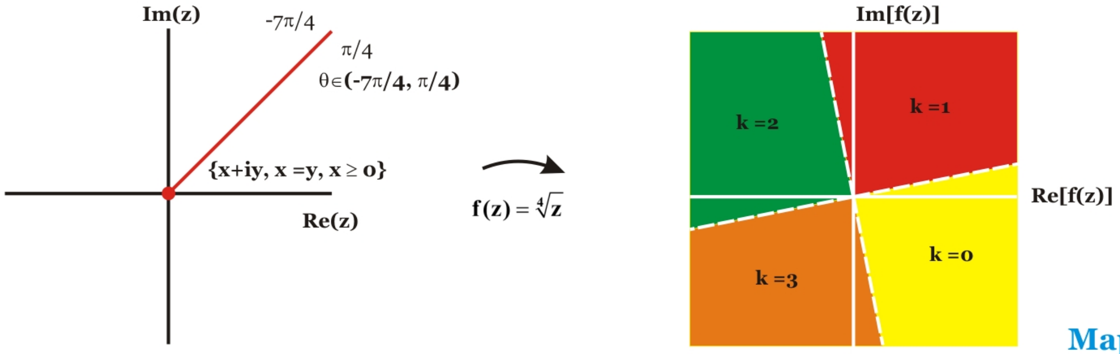
Fórmula para la raíz enésima

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n}\right)} \qquad k = 1, 2, ..., n\text{-}1$$

La función $f(z) = \sqrt[n]{z}$ es una función multivaluada por lo que para cada valor de k existen una ramas, que son determinaciones de la función donde esta es continua.

Corte de ramificación

Es una curva en el plano complejo tal que es posible definir una rama analítica de una función multivaluada sobre el plano complejo excluyendo esa curva

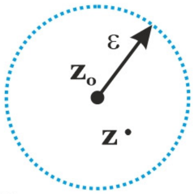


Mapeo

Variable Compleja (IV)

Región

Sea un circulo de radio ε alrededor de z_o, se define:



$|z_1 - z_o| < \varepsilon$

ε-entorno

$0 < |z_1 - z_o| < \varepsilon$

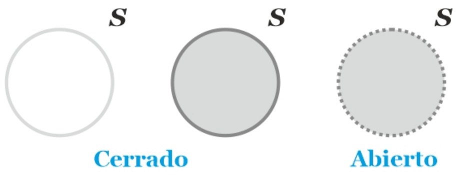
ε-entorno perforado

Punto interior, frontera y exterior

Siempre que trabajaremos un ε-entorno perforado que llamaremos entorno. Se dice que z_o es un punto interior de un conjunto *S*, si existe algún entorno de z_o que esta contenido en S. Se dice que z_o es un punto exterior de *S* si existe algún entorno de z_o que no contiene a S. Si el punto z_o no es interior ni exterior se dice que es un punto de la frontera de S, luego contiene puntos que están en *S* y puntos que no están en *S*.

Punto de acumulación. Conjunto cerrado y abierto

Un x_o es un punto de acumulación de S cuando a todo entorno perforado de z_o contiene al menos un punto de S. Los puntos de la frontera e interiores son puntos de acumulación. Un conjunto es cerrado, si y solo si contiene todos los puntos de acumulación. Un conjunto es abierto si todos puntos son interiores.



Conjunto conexo y acotado

Un conjunto *S* es conexo si todo par de puntos pertenecientes a *S* se puede unir por una linea poligonal, formada por un número finito de segmentos rectos contenidos por completo en *S*. Un conjunto es acotado si esta contenido dentro de alguna circunferencia de radio R.

Dominio: Todo conjunto abierto y conexo **Región** Dominio junto con alguno, ninguno o todos sus puntos de la frontera

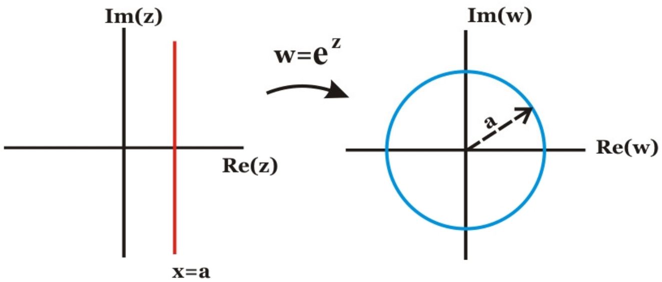
Variable Compleja (V)

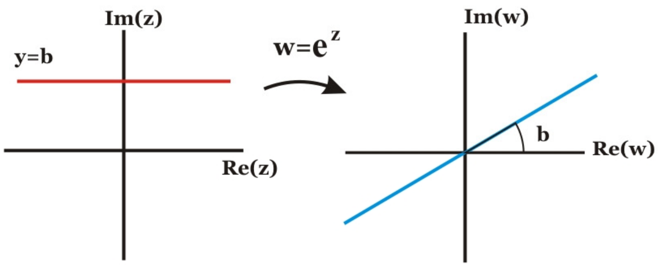
Función exponencial compleja

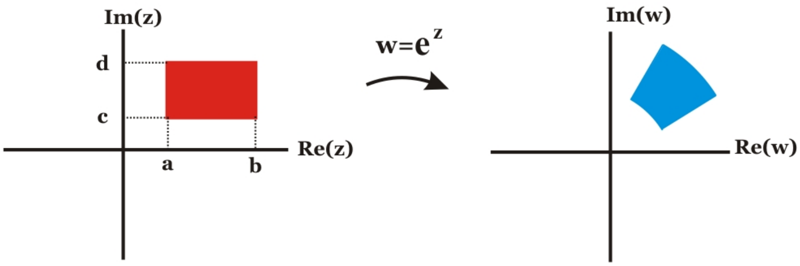
$$e^{z} = |e^{z}| \cdot e^{i\cdot\theta} \qquad\qquad e^{f(z)} = |e^{\mathrm{Re}\, f(z)}| \cdot e^{i\cdot\theta}$$

$$\theta = y + n\cdot 2\pi \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad\qquad \theta = \mathrm{Im}\, f(z) + n\cdot 2\pi \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Mapeo







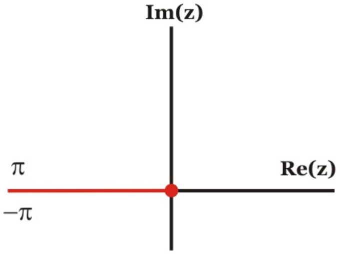
Variable Compleja (VI)

Función logaritmo complejo

$$\mathbf{Log\ (z) = ln\ |z| + i \cdot} \theta \qquad -\pi < \theta < \pi$$

$$\mathbf{Log\ (z) = ln\ |z| + i \cdot} \underbrace{(\theta + \mathbf{n} \cdot \mathbf{2}\pi)}_{\mathbf{arg(z)}} \Rightarrow \mathbf{Log\ (z) = ln\ |z| + i \cdot arg(z)}$$

$$\gamma < \theta < \gamma + \mathbf{2}\pi$$



Corte de ramificación

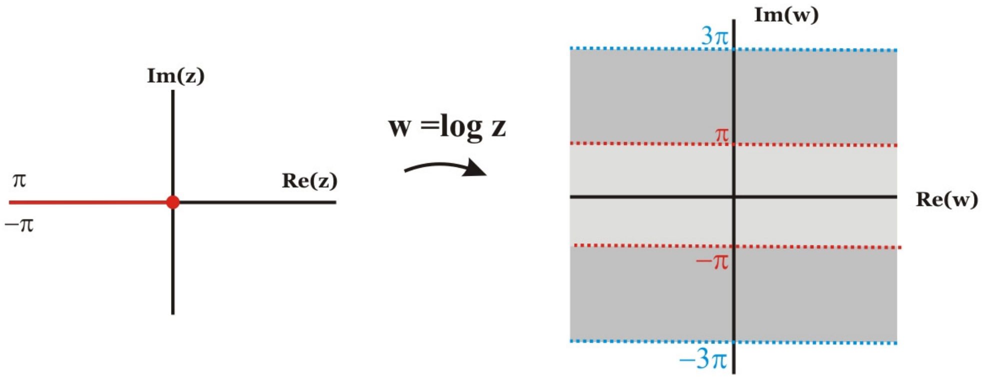
$$\mathbf{Log\ (z) = ln\ |z| + i \cdot arg(z)} \qquad \mathbf{z \neq 0} \qquad -\pi < \mathbf{Arg(z)} < \pi$$

Función valor principal $\quad \mathbf{Log\ (z) = ln\ |z| + i \cdot arg(z)}$

$$\mathbf{log\ (z) = ln\ |z| + i \cdot arg(z) + i \cdot n \cdot 2}\pi \qquad \mathbf{log\ (z) = Log(z) + i \cdot n \cdot 2}\pi$$

Función multivaluada

Mapeo



Variable Compleja (VII)

Transformación de Möebius

$$w = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \qquad a, b, c, d \in C \qquad a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

$$z = \frac{w \cdot d - b}{-w \cdot c + a}$$

Transformada inversa

Límites

Sea una función f(z) definida en todos los puntos z de un entorno perforado de z_o, se define:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = w_o$$

Cuando existe para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que: $|f(z) - w_o| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_o| < \delta$

Teoremas sobre límites

$$\left.\begin{array}{l} f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) \\ z_0 = x_0 + i \cdot y_0 \\ w_0 = u_0 + i \cdot v_0 \end{array}\right\} \quad \lim_{z \to z_o} f(z) = w_o \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (x_o, y_o)} u(x,y) = u_o \quad \lim_{(x,y) \to (x_o, y_o)} v(x,y) = v_o$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{z \to z_o} f(z) = w_o \\ \lim_{z \to z_o} F(z) = W_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim_{z \to z_o} [f(z) \pm F(z)] = w_o \pm W_o \\ \lim_{z \to z_o} [f(z) \cdot F(z)] = w_o \cdot W_o \end{array} \qquad \lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_o}{W_o}$$

Variable Compleja (VIII)

Límites en el infinito $\lim_{z \to z_o} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \to z_o} \frac{1}{f(z)} = 0$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_o \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_o$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

Continuidad

Una función f(z) es continua en z_o si existe $\lim_{z \to z_o} f(z)$ y $f(z_0)$ $\quad \lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_0)$

Luego existe para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que: $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |z - z_o| < \delta$

Derivada compleja

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) \quad (1)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$ **Continuas**

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Condiciones de Cauchy-Riemann}$$

Si una función de variable compleja f(z), cumple la condición (1) y las de Cuachy-Riemann. Se dice que la función es derivable para un punto $z_o \in C$. Si es dirivable en todo un conjunto de puntos en torno a z_o se dice que la función es holomorfa, si se puede desarrollar en serie de Taylor se dice analítica y es entera si es analítica en todo el plano complejo

Variable Compleja (y IX)

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Funciones armónicas

Una función se dice armónica si cumple $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0$

Si ademas cumple la condición de Cauchy- Riemann se denomina armónica conjugada