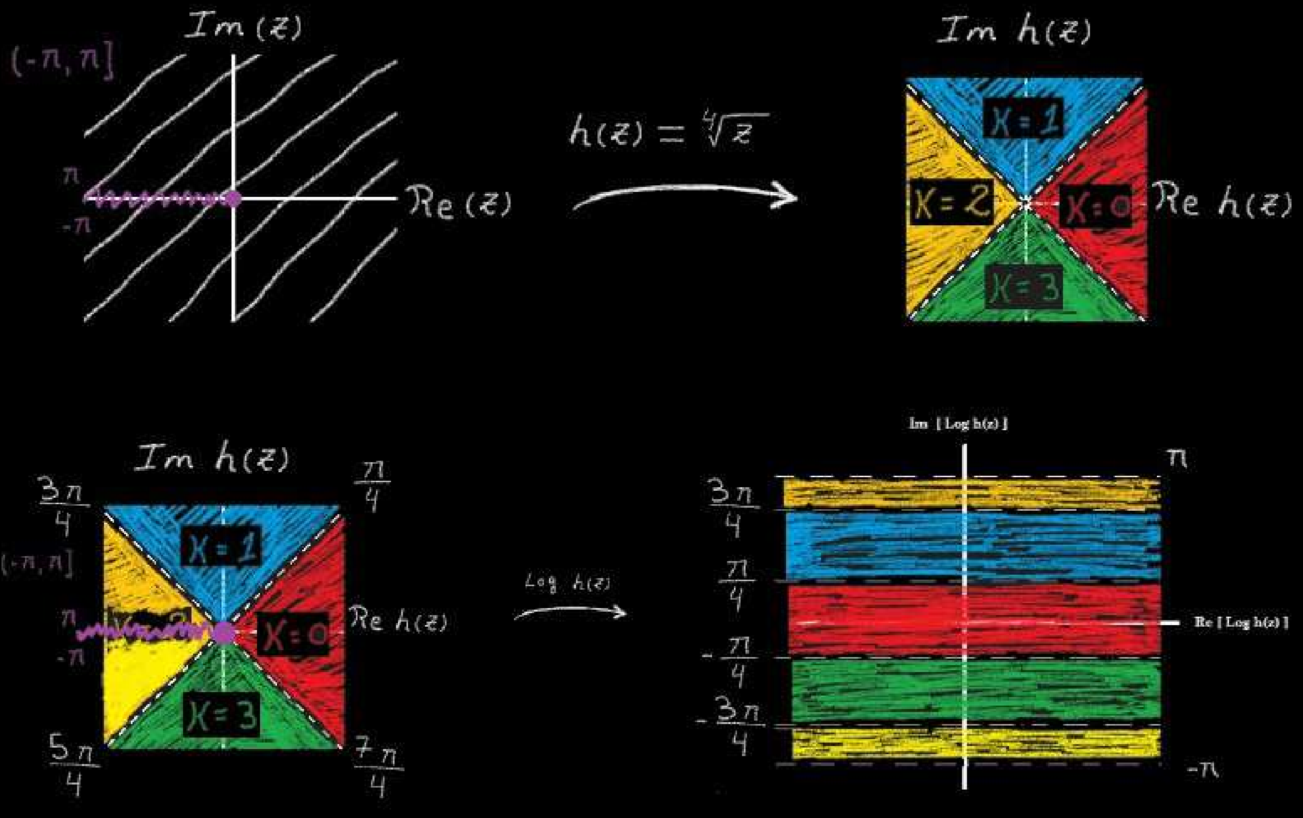
VARIABLE COMPLEJA

JUAN BALLESTEROS PEÑA



HEKATE.ACADEMY

Variable compleja

Juan Ballesteros Peña

4 de enero de 2022

Título: Variable compleja.
Autor: Juan Ballesteros Peña.

http://hekate.academy

IMPORTANTE: Cómo utilizar este documento en combinación con el curso

¡Bienvenido a este curso de variable compleja para métodos matemáticos!

Sí, normalmente uno no lee esta primera página. Le interesa saber cómo es cada ejercicio, su solución y nada más. Pero en tu lugar yo leería estas líneas. A veces es útil saber qué sugieren "los tipos que han hecho la cosa que vas a usar".

Lo primero es que si estás haciendo este curso con la intención de aprobar una asignatura sigas el orden de los vídeos y los ejercicios. Los ejercicios aparecen por temas y pudiera darte la sensación de que cada tema es como un "apartado independiente", pero no es así. Muchas veces ocurre que uno no sabe resolver un ejercicio de exponenciales no porque tenga problemas para manipular la exponencial compleja, sino porque no comprende bien el lenguaje matemático utilizado para redactar el enunciado.

Los ejercicios aquí propuestos no sólo presentan soluciones cuya dificultad va en aumento dentro de cada tema, sino que la dificultad para entender la matemática del enunciado se va incrementando entre los ejercicios $1-80$. Veréis que los enunciados de los primeros temas parecen más "amigables" que los enunciados para los problemas de logaritmos.

Por otra parte has de saber que este documento sólo ofrece enunciados y respuestas. No pretende ser una guía explicativa de ningún aspecto de los ejercicios. Hay muchos ejercicios que admiten más de una posible respuesta. Aquí sólo mostramos una de ellas. No se incluyen mapeos. Para conocer el resto de hipotéticas respuestas, mapeos o la explicación de algún paso tendrás que consultar el vídeo de resolución correspondiente al ejercicio.

Por último, aunque no menos importante, nos gustaría pediros que, si habéis comprado este curso, no lo distribuyáis. Este documento es libre y también hemos publicado de forma gratuita una parte del curso con la que creemos que muchos estudiantes de carreras matemáticamente menos exigentes pueden tener suficiente.

Este curso ha necesitado una inversión de tiempo que supera las 1000 *horas*, aparte de unos conocimientos que, como provienen de personas con una mente bastante normal y limitada, han necesitado años de esfuerzo para implantarse en nuestras cabezas. Os pedimos que tengáis ésto en consideración y penséis en qué precio le pondríais vosotros a mil horas de vuestro trabajo. Es poco probable que concluyáis que el precio del curso es elevado.

Todas estas recomendaciones parten de nuestro punto de vista, pero vosotros ya sois mayores. En vuestras manos queda qué uso le deis a este curso. ¡Esperamos que sea uno correcto! ¡Un abrazo grande y que lo disfrutéis!

Pd: Si detectáis alguna errata o queréis hacernos llegar vuestras críticas (tanto cosas que os hayan gustado y que no cambiaríais como aspectos que os gustaría enfocar de otra manera o añadir) podéis escribirnos a:

$$info@hekate.academy$$

De esa manera nos ayudaréis a mejorar para poder seguir realizando cursos de mayor calidad.

Índice general

Parte I

Enunciados

Operaciones elementales

Ejercicios (1–8)

[**Respuesta:** página 33]

Reescribe los siguientes números complejos en forma polar y utilizando la identidad de Euler.

1. $z = 1$.
2. $z = 1 + \mathrm{i}$.
3. $z = 3\mathrm{i}$.
4. $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
5. $z = -7$.
6. $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
7. $z = -4\mathrm{i}$.
8. $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

Ejercicio 9

[**Respuesta:** página 33]

Demuestra que $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Ejercicio 10

[**Respuesta:** página 33]

Determina el argumento principal “Arg” de los números “z” trabajados en los ejercicios 1–8.

Ejercicio 11

[**Respuesta:** página 34]
Sean $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ y $z_2 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
Calcular:

a) $z_1 z_2$.

b) $\frac{z_1}{z_2}$.

Demostrar que se obtiene el mismo resultado independientemente de si se utiliza $\mathrm{Arg}(z_2) = -\frac{2\pi}{3}$ o $\arg(z_2) = \frac{4\pi}{3}$.

Ejercicio 12

[**Respuesta:** página 34]
Encontrar el argumento y el argumento principal de:

$$z = \frac{\mathrm{i}}{-4 - 4\mathrm{i}}.$$

Ejercicio 13

[**Respuesta:** página 34]
Elevar a la séptima potencia el número $z = -4 - 4\mathrm{i}$.

Ejercicio 14

[**Respuesta:** página 34]
Hoy es el mejor día de tu vida. ¡Trabajas para Légolas! (le llevas las flechas, los refrescos, sus cremas faciales y un par de gomas para el pelo). Os encontráis en una llanura absolutamente plana sin ningún tipo de relieve y de dimensiones infinitas. Légolas se ha llevado a unos cuantos orcos para practicar su puntería con el arco, pero no es cruel y respeta la vida, así que sus flechas son con punta de gomaespuma. Esto no lo saben los orcos y salen huyendo lo más lejos que pueden.

En un cierto momento, te das cuenta de que Légolas está intentando disparar las flechas lo más lejos posible (es decir, que la distancia recorrida en dirección horizontal sea la máxima). Para la misma velocidad inicial de lanzamiento hace varias pruebas cambiando el ángulo de disparo. Es Légolas, lo averigua enseguida.

Después del ejercicio te invita a un pan de lembas, se pone filosófico y te pregunta: ¿por qué la naturaleza es así? ¿por qué ése era el ángulo perfecto?

Tú coges un lápiz y una servilleta y se lo demuestras.

Importante: haz la aproximación de que las flechas disparadas acaban a la misma altura de la que parten.

Ejercicio 15

[**Respuesta:** página 34]

Demostrar:

a) $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$.

b) $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$.

Ejercicio 16

[**Respuesta:** página 34]

Demuestra que:

a)
$$\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{2}.$$

b)
$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(\omega t-\delta)dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t-\delta)dt = \frac{T}{2},$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Ejercicio 17

[**Respuesta:** página 35]

¿Dónde se habría de situar una región para que al ser multiplicada por el numero "$z=\mathrm{i}$" rotase 90 grados respecto a su propio centro? Muéstralo con un ejemplo.

Ejercicio 18

[**Respuesta:** página 35]

Calcula $\frac{1+\mathrm{i}}{-2}$ y $(1+\mathrm{i})(-2)$ y descríbelas como transformaciones sobre el número complejo $1+\mathrm{i}$. ¿Qué ocurre cuando comparas ambos resultados?, ¿Por qué?

Ejercicio 19

[**Respuesta:** página 35]
Dada la aplicación

$$f(z) = \frac{(1+i)(z-i)}{-\left(-2\sqrt{3}\ -2\mathrm{i}\right)^2},$$

a) Describe $f(z)$ como una composición de homotecias (multiplicación por una constante real), rotaciones y traslaciones sobre “z” en el plano complejo.

b) Expresar las rotaciones haciendo referencia al argumento principal.

Ejercicio 20

[**Respuesta:** página 35]
Dada la aplicación

$$f(z) = \frac{4z+10+\mathrm{i}}{2z+5},$$

a) Describe $f(z)$ como una composición de homotecias (multiplicación por una constante real), rotaciones y traslaciones sobre “z” en el plano complejo.

b) Expresar las rotaciones haciendo referencia al argumento principal.

Raíces complejas

Ejercicio 21

[**Respuesta:** página 36]
Calcular:

a) $\sqrt{4}$.

b) $\sqrt{-4}$.

Ejercicio 22

[**Respuesta:** página 36]
Realiza el siguiente cálculo y pinta en un plano complejo las soluciones:

$$\sqrt[8]{16}.$$

¿Cuál es el radio de la circunferencia en torno a la que se disponen las raíces?

Ejercicio 23

[**Respuesta:** página 36]
Halla las raíces de la siguiente ecuación:

$$z^3 + 1 = 0.$$

Represéntalas en el plano complejo.

Ejercicio 24

[**Respuesta:** página 37]

Halla las raíces de la siguiente ecuación:

$$z^3 - 1 = 0.$$

Represéntalas en el plano complejo.

Ejercicio 25

[**Respuesta:** página 37]

Encuentra las raíces de la siguiente ecuación y represéntalas en el plano complejo:

$$z^6 + 2z^3 - 35 = 0.$$

a) ¿Cuántas raíces tienes que obtener?

b) ¿Por qué las raíces no se encuentran todas en torno a la misma circunferencia?

c) ¿Cuántas circunferencias hay?

d) ¿Por qué, sin embargo, en ecuaciones como $z^6+a = 0$ (donde "a" es cualquier número complejo) las raíces sí se hallan todas en la misma circunferencia?

e) ¿Contradice ésto la idea de que **todas** las raíces de un número se han de situar en torno a la misma circunferencia? ¿Por qué?

Ejercicio 26

[**Respuesta:** página 38]

Resuelve la siguiente ecuación y representa sus soluciones en el plano complejo:

$$z^4 - 1 = \mathrm{i}.$$

Raíces complejas con corte de ramificación

Ejercicio 27

[**Respuesta:** página 38]

Encontrar la imagen de la rama con valor “$k = 1$” cuando aplicamos la transformación

$$f(z) = \sqrt{z},$$

sobre todo el plano complejo escogiendo la determinación del argumento $[0, 2\pi)$.

Ejercicio 28

[**Respuesta:** página 38]

Encontrar la imagen de la rama con valor “$k = 0$” cuando aplicamos la transformación

$$f(z) = \sqrt{z},$$

sobre todo el plano complejo escogiendo la determinación principal del argumento.

Ejercicio 29

[**Respuesta:** página 38]

Encontrar la imagen de la rama con valor “$k = 1$” cuando aplicamos la transformación

$$f(z) = \sqrt{z},$$

sobre todo el plano complejo escogiendo la determinación principal del argumento.

Ejercicio 30

[**Respuesta:** página 38]
Dada la aplicación

$$h(z) = \sqrt{z},$$

y habiendo escogido la determinación principal del argumento de manera que $h(1) = -1$ determinar:

1) a) $h(\mathrm{i})$,
   b) $h(-\mathrm{i})$,
   c) $h(-1)$.

2) El valor de $h(z)$ cuando "z" se aproxima indefinidamente al número "$-\pi$". Es decir, hallar:

$$\lim_{z \to -\pi} h(z).$$

Ejercicio 31

[**Respuesta:** página 39]
Dada la aplicación

$$h(z) = \sqrt[3]{z},$$

con corte de ramificación en la semirrecta imaginaria negativa y escogiendo como determinación del argumento o $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ o $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right)$ tal que $h(1) = 1$ determinar:

1) a) $h(\mathrm{i})$,
   b) $h(-\mathrm{i})$,
   c) $h(-1)$.

2) El valor de $h(z)$ cuando "z" se aproxima indefinidamente al número "$-\pi$". Es decir, hallar:

$$\lim_{z \to -\pi} h(z).$$

Ejercicio 32

[**Respuesta:** página 39]
Dada la aplicación

$$h(z) = \sqrt[4]{z},$$

con corte de ramificación en la semirrecta $R : \{z = x + \mathrm{i}y \mid x = -y,\ x \geq 0\}$ tal que $h(1) = -1$ determinar:

1) a) $h(\mathrm{i})$,
   b) $h(-\mathrm{i})$.

2) $\lim_{z\to 1-i} h(z)$.

Ejercicio 33

[**Respuesta:** página 39]

Mapear la región en la que se transforma el plano complejo tras someterlo a la aplicación:

$$h(z) = \sqrt[4]{z},$$

con corte de ramificación $R : \{z = x + \mathrm{i}y \mid x \geq 0,\ y = 0\}$ siendo $h(-\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$.

Ejercicio 34

[**Respuesta:** página 39]

Mapear la región en la que se transforma el plano complejo tras someterlo a la aplicación:

$$h(z) = \sqrt[4]{z},$$

con corte de ramificación $R : \{z = x + \mathrm{i}y \mid x \geq 0,\ y = 0\}$.

Ejercicio 35

[**Respuesta:** página 39]

Mapear la región en la que se transforma el plano complejo tras someterlo a la aplicación:

$$h(z) = \sqrt[4]{z},$$

con corte de ramificación $R : \{z = x + \mathrm{i}y \mid y \geq 0,\ x = 0\}$.

Ejercicio 36

[**Respuesta:** página 40]

Mapear la región en la que se transforma el semiplano imaginario positivo tras someterlo a la aplicación:

$$h(z) = \sqrt[4]{z}.$$

Ejercicio 37

[**Respuesta:** página 40]

a) Dada
$$f(z) = \sqrt[3]{z},$$
hallar $f(r)$ donde
$$r : \{z = x + \mathrm{i}y \mid x = -y,\ x \leq 0\}.$$

b) Dada
$$g(z) = \sqrt[3]{z},$$
tal que $g(-1) = -1$ con corte de ramificación en la semirrecta $R = \sqrt[3]{r}$ para $k = 2$, mapear $g(\mathbb{C})$.

Regiones

Importante: estos ejercicios sobre regiones son muy sencillitos. La dificultad fuerte vendrá cuando mezclemos estos conceptos con exponenciales, logaritmos y transformaciones de Möbius.

Ejercicio 38

[**Respuesta:** página 40]
Determina el conjunto "S" en el plano complejo y caracterízalo:

$$S : \{\mathrm{Im}(z) < -3\}.$$

Ejercicio 39

[**Respuesta:** página 40]
Determina el conjunto "S" en el plano complejo y caracterízalo:

$$S : \{\mathrm{Im}(z) = e^{\mathrm{i}\pi}\}.$$

Ejercicio 40

[**Respuesta:** página 41]
Determina el conjunto "S" en el plano complejo y caracterízalo:

$$S : \{|2z + 5| > 6\}.$$

Ejercicio 41

[**Respuesta:** página 41]
Determina el conjunto "S" en el plano complejo y caracterízalo:

$$S : \{|z + 16| \geq |z|\}.$$

Función exponencial

Ejercicio 42

[**Respuesta:** página 41]
Probar la siguiente igualdad:

$$e^{2\pm 3\pi \mathrm{i}} = -e^2.$$

Ejercicio 43

[**Respuesta:** página 41]
Probar la siguiente igualdad:

$$e^{\frac{2+\pi \mathrm{i}}{4}} = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i).$$

Ejercicio 44

[**Respuesta:** página 41]
Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2}.$$

Ejercicio 45

[**Respuesta:** página 42]
Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\left|e^{2z+\mathrm{i}} + e^{\mathrm{i}z^2}\right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}.$$

Ejercicio 46

[**Respuesta:** página 42]
Hallar todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = 1 + \mathrm{i}$.

Ejercicio 47

[**Respuesta:** página 42]
Dada la función:

$$f(z) = (\mathrm{i}e^z)^2\,,$$

y la región:

$$S : \{z = x + \mathrm{i}y |\ 4 < |z| < 5 \text{ y } Re(z) \geq 0\},$$

determinar el conjunto de números "z" tal que $f(z) \in S$.

Ejercicio 48

[**Respuesta:** página 42]
Dado el conjunto:

$$A : \{z = x + \mathrm{i}y \mid |z| < 1\},$$

determinar el conjunto B definido como:

$$B : \left\{ z = x + \mathrm{i}y \,\middle|\, \left| e^{z^2} \right| \in A \right\}.$$

Logaritmos complejos

Ejercicio 49

[**Respuesta:** página 42]

Dadas las funciones:

$f(z) = \operatorname{Log}(z)$ como el valor principal del logaritmo,

$g(z) = \log(z)$ y

$h(z) = \operatorname{Log}(z)$ como la función rama principal del logaritmo,

hallar:

a) $f(0)$,

b) $g(0)$,

c) $h(0)$,

d) $f(1)$,

e) $g(1)$,

f) $h(1)$,

g) $f(-1)$,

h) $g(-1)$,

i) $h(-1)$.

Ejercicio 50

[**Respuesta:** página 43]

Determinar cuándo $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log}(z)$, donde $\operatorname{Log}(z)$ es la función rama principal del logaritmo complejo.

Ejercicio 51

[**Respuesta:** página 43]
¿Para qué conjunto de números $z \in \mathbb{C}$ es cierta la siguiente expresión?

$$\mathrm{Log}(\mathrm{i}z) = \mathrm{Log}(\mathrm{i}) + \mathrm{Log}(z),$$

siendo $\mathrm{Log}(z)$ la función rama principal del logaritmo complejo.

Ejercicio 52

[**Respuesta:** página 43]
Dada la función

$$h(z) = \sqrt[4]{z},$$

tal que, una vez escogida la determinación principal del argumento, $h(1) = \mathrm{i}$,

a) hallar $\mathrm{Log}(h(\mathrm{i}))$,

b) mapear $\mathrm{Log}(h(z))$,

donde $\mathrm{Log}(z)$ es la función rama principal del logaritmo complejo.

Ejercicio 53

[**Respuesta:** página 43]
Dada la aplicación

$$h(z) = \sqrt[4]{z},$$

con corte de ramificación en la semirrecta

$$R : \{z = x + \mathrm{i}y \mid x \leq 0,\ y = 0\},$$

mapear $\mathrm{Log}(h(z))$ siendo "Log" la función rama principal del logaritmo complejo.

Ejercicio 54

[**Respuesta:** página 44]
Sea la función

$$f(z) = \sqrt[3]{z},$$

con corte de ramificación la semirrecta imaginaria positiva de manera que $f(-\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.

Dada $g(z) = \mathrm{Log}(z)$, mapear $g(f(\mathbb{C}))$ y determinar esa región. $\mathrm{Log}(z)$ es la función rama principal del logaritmo complejo.

Ejercicio 55

[**Respuesta:** página 44]
Partiendo del Ejercicio 54, calcula los siguientes límites:

$$\lim_{z\to -3} g(z),\ \lim_{z\to -3} f(z),\ \lim_{z\to \mathrm{i}} g(z),\ \lim_{z\to \mathrm{i}} f(z).$$

Ejercicio 56

[**Respuesta:** página 44]
Sea $g(z)$ una rama continua del logaritmo con corte de ramificación la semirrecta $R : \{z = x + \mathrm{i}y \mid x \leq 0,\ x = y\}$ tal que $\mathrm{Im}(g(-1)) = 5\pi$.

a) Determinar la rama.

b) Mapear $g(z)$.

c) Hallar el valor de "n" para obtener $g(z)$.

d) Calcular $\log(1)$ y $g(1)$.

e) Hallar los siguientes límites:

$$\lim_{z\to -3} g(z),\ \lim_{z\to -1-\mathrm{i}} g(z).$$

Transformaciones de Möbius

Ejercicio 57

[**Respuesta:** página 45]
Dada la función

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

y el conjunto:

$$A : \left\{ z = x + \mathrm{i}y \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \right\}$$

determinar $f(A)$.

Ejercicio 58

[**Respuesta:** página 45]
Dada la función

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

y el conjunto

$$A : \{z = x + \mathrm{i}y \mid y = -x\},$$

determinar $f(A)$.

Ejercicio 59

[**Respuesta:** página 45]
Sea la aplicación

$$h(z) = \frac{2\mathrm{i}z + \mathrm{i}}{4z - 1},$$

y el conjunto

$$A : \left\{ \left| z + \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \right\},$$

unido al segmento de recta

$$S : \{z = x + \mathrm{i}y| \; -3 \leq x \leq 0, \; y = 0\}.$$

Se pide determinar $h(A \cup S)$.

Ejercicio 60

[**Respuesta:** página 45]

Dada la función

$$h(z) = \frac{6}{2z - 2\mathrm{i}},$$

determinar el conjunto

$$A : \left\{ z \in \mathbb{C}, \; |h(z)| < 2, \; \mathrm{Arg} \; h(z) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \right\}.$$

Ejercicio 61

[**Respuesta:** página 45]

El ejercicio 61 es rehacer el ejercicio 60 pero desde otro punto de vista. Utiliza la función inversa de $h(z)$ para determinar la imagen del conjunto

$$h(A) = B : \left\{ z \in \mathbb{C}, \; |z| < 2, \; \mathrm{Arg} \; z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \right\}.$$

En otras palabras, hay que determinar A como la transformación de $h(A) = B$ por medio de la función h^{-1}.

Ejercicio 62

[**Respuesta:** página 46]

Determinar los puntos donde es continua la función:

$$h(z) = \mathrm{Log} \; \frac{z - 3\mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1},$$

donde “Log” es la función rama principal del logaritmo complejo.

Otras formas análogas a este enunciando podrían ser:

¿Cuál es el dominio de $h(z)$?

¿Dónde no es continua $h(z)$?

Ejercicio 63

[**Respuesta:** página 46]

Imagina que hubieras sido tú el que hubiese propuesto el ejercicio anterior. ¿Cómo lo habrías pensado? Te habrás dado cuenta de que la transformación de Möbius dada produce que el dominio de la función $h(z)$ excluya un arco de circunferencia. ¿Cómo habrías encontrado esa transformación de Möbius? Constrúyela.

Derivabilidad de funciones usando la definición de límite

Ejercicio 64

[**Respuesta:** página 46]

Sea la función $f(z) = c$, donde "c" es una constante. Demostrar si $f(z)$ es derivable o no utilizando la definición del límite. En caso afirmativo, resolver dicho límite. Es decir, calcular $f'(z)$.

Ejercicio 65

[**Respuesta:** página 46]

Dada la función $f(z) = z$, demostrar si $f(z)$ es derivable o no utilizando la idea del límite. En caso afirmativo, calcular $f'(z)$.

Ejercicio 66

[**Respuesta:** página 46]

Sea la función $f(z) = z^2$. Demostrar si $f(z)$ es derivable o no utilizando la idea del límite. En caso afirmativo, calcular $f'(z)$.

Ejercicio 67

[**Respuesta:** página 46]

Dada la función $f(z) = \mathrm{Im}(z)$. Demostrar si $f(z)$ es derivable o no utilizando la idea del límite. En caso afirmativo, calcular $f'(z)$.

Ejercicio 68

[**Respuesta:** página 47]

Sea la función $f(z) = \bar{z}$. Demostrar si $f(z)$ es derivable o no utilizando la idea del límite. En caso afirmativo, calcular $f'(z)$.

Ejercicio 69

[**Respuesta:** página 47]

Dada la función $f(z) = |z|^2$. Demostrar si $f(z)$ es derivable o no utilizando la idea del límite. En caso afirmativo, calcular $f'(z)$.

Derivabilidad de funciones *sin* usar la definición de límite

Ejercicio 70

[**Respuesta:** página 47]

Sea la función $f(z) = \mathrm{Im}(z)$. Demuestra si $f(z)$ es una función derivable, holomorfa o entera *sin* usar la definición de la derivada como un límite.

Ejercicio 71

[**Respuesta:** página 47]

Sea la función $f(z) = |z|^2$. Demuestra si $f(z)$ es una función derivable, holomorfa o entera *sin* usar la definición de la derivada como un límite.

Ejercicio 72

[**Respuesta:** página 47]

Sea la función $f(z) = \bar{z}$. Demuestra si $f(z)$ es una función derivable, holomorfa o entera *sin* usar la definición de la derivada como un límite.

Analiticidad, derivabilidad y holomorfía de funciones. Funciones armónicas y armónicas conjugadas

Ejercicio 73

[**Respuesta:** página 48]

Determina las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares partiendo de su definición en coordenadas cartesianas.

Ejercicio 74

[**Respuesta:** página 48]

Sabemos que si $f(z)$ presenta funciones armónicas conjugadas, entonces $f(z)$ es holomorfa. Ésto implica que su dominio de derivabilidad es más extenso que el de una función derivable. Pero si $f(z)$ **no** posee funciones armónicas conjugadas, lo único que podemos decir es que $f(z)$ **no** es holomorfa, lo cual **no** implica que $f(z)$ sea **no** derivable. Ésto no lo sabemos. Bien podría ocurrir que una función que no presentara funciones armónicas conjugadas sí fuese derivable aunque no holomorfa. Muestra este hecho a partir de la función $f(z) = |z|^2$.

Ejercicio 75

[**Respuesta:** página 48]

Sea la función

$$f(z) = \frac{3x^2}{2} + 2x + \mathrm{i}\left(3xy + 2y + \frac{3\mathrm{i}y^2}{2}\right),$$

Demostrar si $f(z)$ es o no holomorfa. ¿Posee $f(z)$ funciones armónicas o armónicas conjugadas?

Ejercicio 76

[**Respuesta:** página 48]

Dada la aplicación:

$$f(z) = 2x + 3Ay + \mathrm{i}(Bx + 5Cy),$$

siendo A, B y C números reales. ¿Para qué valores de A, B y C se obtiene que $f(z)$ es analítica?

Ejercicio 77

[**Respuesta:** página 48]

Dada la función

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

demostrar que u y v son funciones armónicas conjugadas si $f(z)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann y posee derivadas parciales de segundo orden que son continuas.

Ejercicio 78

[**Respuesta:** página 49]

Construye una función analítica de la forma $f(z) = u + \mathrm{i}v$ para el caso en que $u(x, y)$ presenta la siguiente forma:

$$u = 2x - x^3 + 3xy^2.$$

Pista: comprueba si $u(x, y)$ es armónica.

Ejercicio 79

[**Respuesta:** página 49]

Hallar todas las posibles funciones holomorfas en el plano complejo con parte real constante.

Ejercicio 80

[**Respuesta:** página 49]

Demostrar si

$$v(x, y) = 3x^2y - 2x - y^3$$

podría ser la parte imaginaria de una función analítica $f(z)$. En caso afirmativo, hallar $f(z)$

Parte II

Respuestas a los ejercicios

Operaciones elementales

R-Ejercicios (1–8)

[**Enunciado:** página 7]

1. $z = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) = 1e^{\mathrm{i}0}$.
2. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
3. $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3\ e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
4. $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\ e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
5. $z = 7\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = 7\ e^{\mathrm{i}\pi}$.
6. $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\ e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.
7. $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4\ e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.
8. $z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\ e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$.

R-Ejercicio 9

[**Enunciado:** página 7]
$e^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1 + \mathrm{i}0 = -1$.

R-Ejercicio 10

[**Enunciado:** página 7]

1. $\mathrm{Arg}(1) = 0$.
2. $\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\mathrm{Arg}(3\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$.
4. $\mathrm{Arg}(-\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \frac{5\pi}{6}$.
5. $\mathrm{Arg}(-7) = \pi$.
6. $\mathrm{Arg}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3} = -\frac{4\pi}{6}$.
7. $\mathrm{Arg}(-4\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$.
8. $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{6}$.

R-Ejercicio 11

[**Enunciado:** página 8]

a) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

R-Ejercicio 12

[**Enunciado:** página 8]

$\arg(z) = \frac{5\pi}{4}$.

$\operatorname{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$.

R-Ejercicio 13

[**Enunciado:** página 8]

$$z^7 = \left(4\sqrt{2}\right)^7 \; e^{\mathrm{i}\frac{35\pi}{4}} = \left(4\sqrt{2}\right)^7 \; e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

R-Ejercicio 14

[**Enunciado:** página 8]
Este ejercicio es una demostración en sí mismo. Ver el vídeo de resolución correspondiente.

R-Ejercicio 15

[**Enunciado:** página 9]
Ver el vídeo de resolución correspondiente. No obstante, los puntos clave son relacionar:

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ con

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

R-Ejercicio 16

[**Enunciado:** página 9]
Ver el vídeo de resolución correspondiente.

R-Ejercicio 17

[**Enunciado:** página 9]
La posición sería el punto (0,0). Es decir, el origen de coordenadas.

R-Ejercicio 18

[**Enunciado:** página 9]
Ocurre que obtenemos 2 nuevos números complejos ambos con el mismo argumento principal “Arg”. Esto se debe a que puedo pensar en esas operaciones como multiplicar y dividir por “-1”, lo cual produce el mismo resultado. Ver el vídeo de resolución para entenderlo.

R-Ejercicio 19

[**Enunciado:** página 10]
Todas las rotaciones han de ser entendidas respecto al origen de coordenadas.

1. Trasladamos z una unidad en sentido negativo sobre el eje imaginario.
2. Multiplicamos el módulo del z resultado del paso anterior por la cantidad $\sqrt{2}$ y lo rotamos 45 grados en sentido antihorario.
3. El primer signo “menos” del denominador rota todo lo anterior 180 grados.
4. Por último, el módulo del z resultado de la operación anterior se divide entre 16 y rotamos ese z 60 grados en sentido horario.

R-Ejercicio 20

[**Enunciado:** página 10]
Todas las rotaciones han de ser entendidas respecto al origen de coordenadas.

1. El módulo de z se ve aumentado al doble.
2. Ese nuevo z es trasladado 5 unidades en sentido positivo sobre el eje real.
3. Si ese z resultado del paso anterior se encontraba dentro del círculo unidad, ahora pasa a estar fuera de él y viceversa. Además, es reflejado respecto al eje real.
4. Nuevamente se aumenta en cantidad 2 el módulo del z resultado del paso anterior y se le hace rotar 90 grados en sentido antihorario.
5. Por último, ese nuevo z nacido del paso anterior es trasladado 2 unidades en sentido positivo sobre el eje real.

Raíces complejas

R-Ejercicio 21

[**Enunciado:** página 11]

a) $2e^{\mathrm{i}0} = 2$ y $2^{\mathrm{i}\pi} = -2$.

b) $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i}$ y $2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -2\mathrm{i}$.

R-Ejercicio 22

[**Enunciado:** página 11]
Habría 8 raíces o soluciones:

1) $\sqrt{2}$,

2) $1 + \mathrm{i}$,

3) $\mathrm{i}\sqrt{2}$,

4) $-1 + \mathrm{i}$,

5) $-\sqrt{2}$,

6) $-1 - \mathrm{i}$,

7) $-\mathrm{i}\sqrt{2}$,

8) $1 - \mathrm{i}$.

Todas se sitúan en torno a una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, que es el módulo de la raíz octava de 16. Es decir, se sitúan formando una circunferencia de radio $\left|\sqrt[8]{16}\right|$

R-Ejercicio 23

[**Enunciado:** página 11]
Las raíces o soluciones de esa ecuación serían 3:

1) -1,

2) $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

3) $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

R-Ejercicio 24

[**Enunciado:** página 11]
Las raíces o soluciones de esa ecuación serían 3:

1) 1,

2) $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

3) $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

R-Ejercicio 25

[**Enunciado:** página 12]

a) Habría 6 soluciones o raíces:

   1) $\sqrt[3]{5}$,
   2) $\sqrt[3]{5}\ e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$,
   3) $\sqrt[3]{5}\ e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$,
   4) $\sqrt[3]{7}\ e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$,
   5) $\sqrt[3]{7}\ e^{\mathrm{i}\pi}$,
   6) $\sqrt[3]{7}\ e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

b) Porque las 6 soluciones proceden de ejecutar raíces cúbicas sobre 2 números *distintos*. Si las 6 soluciones nacieran de hacer la raíz sexta sobre un cierto número "z" entonces sí se hallarían en torno a la misma circunferencia.

c) Hay 2 circunferencias.

d) Porque en ese caso las soluciones salen de hacer la raíz sexta sobre un sólo número.

e) No. Porque es cierto que todas las raíces de *un* determinado número se sitúan en torno a una circunferencia. En este ejemplo lo que ocurre es que las soluciones provienen de hacer las raíces a *dos* números distintos. Y las raíces de cada número se sitúan en su propia circunferencia.

R-Ejercicio 26

[**Enunciado:** página 12]
Habría 4 soluciones o raíces:

1) $\sqrt[8]{2}\; e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}}$,

2) $\sqrt[8]{2}\; e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{16}}$,

3) $\sqrt[8]{2}\; e^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{16}}$,

4) $\sqrt[8]{2}\; e^{\mathrm{i}\frac{25\pi}{16}}$.

Raíces complejas con corte de ramificación

R-Ejercicio 27

[**Enunciado:** página 13]
La imagen sería el semiplano imaginario negativo. Ésto implica que el eje real **no** está incluído en la imagen.

R-Ejercicio 28

[**Enunciado:** página 13]
La imagen sería el semiplano real positivo. Ésto implica que el eje imaginario **no** está incluído en la imagen.

R-Ejercicio 29

[**Enunciado:** página 13]
La imagen sería el semiplano real negativo. Ésto implica que el eje imaginario **no** está incluído en la imagen.

R-Ejercicio 30

[**Enunciado:** página 14]

a) $h(\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$.

b) $h(-\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

c) $h(-1)$ **no** tiene imagen definida.

d) El límite propuesto no existe.

R-Ejercicio 31

[**Enunciado:** página 14]

a) $h(\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}}$.

b) $h(-\mathrm{i})$ **no** tiene imagen definida.

c) $h(-1) = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{3}}$.

d) $\lim_{z\to-\pi} h(z) = \sqrt[3]{\pi}\ e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{3}}$.

R-Ejercicio 32

[**Enunciado:** página 14]

a) $h(\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{8}}$.

b) $h(-\mathrm{i}) = e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}}$.

c) El límite propuesto **no** existe.

R-Ejercicio 33

[**Enunciado:** página 15]

La imagen sería el cuadrante comprendido entre los $\frac{\pi}{2}$ y π radianes sin incluir ni al semieje imaginario positivo ni al semieje real negativo.

R-Ejercicio 34

[**Enunciado:** página 15]

La imagen ocuparía el plano entero *sin* incluir los ejes real e imaginario. Entre los 0 y $\frac{\pi}{2}$ radianes sería la imagen para "$k = 0$". Entre los $\frac{\pi}{2}$ y π radianes tendríamos la imagen correspondiente a "$k = 1$". La imagen para "$k = 2$" sería la del cuadrante comprendido entre los π y $\frac{3\pi}{2}$ radianes. Y el cuadrante acotado entre los $\frac{3\pi}{2}$ y 2π radianes sería la imagen para "$k = 3$".

R-Ejercicio 35

[**Enunciado:** página 15]

La imagen ocuparía las siguientes regiones. Entre los $-\frac{3\pi}{8}$ y $\frac{\pi}{8}$ radianes obtendríamos la imagen para "$k = 0$". Entre los $\frac{\pi}{8}$ y $\frac{5\pi}{8}$ radianes hallaríamos la imagen correspondiente a "$k = 1$". La imagen para "$k = 2$" sería la del cuadrante comprendido entre los $\frac{5\pi}{8}$ y $\frac{9\pi}{8}$ radianes. Y el cuadrante acotado entre los $\frac{9\pi}{8}$ y $\frac{13\pi}{8}$ radianes sería la imagen para "$k = 3$". Las líneas que delimitan cada una de estas regiones **no** serían imagen de ningún punto.

R-Ejercicio 36

[**Enunciado:** página 15]

Una posible solución sería la siguiente. La imagen ocuparía las siguientes regiones. Entre los 0 y $\frac{\pi}{4}$ radianes obtendríamos la imagen para "$k = 0$".Entre los $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{4}$ radianes hallaríamos la imagen correspondiente a "$k = 1$". La imagen para "$k = 2$" sería la del cuadrante comprendido entre los π y $\frac{5\pi}{4}$ radianes. Y el cuadrante acotado entre los $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{7\pi}{4}$ radianes sería la imagen para "$k = 3$". Las líneas que delimitan cada una de estas regiones **no** serían imagen de ningún punto.

R-Ejercicio 37

[**Enunciado:** página 16]

a) Ninguna rama incluiría el cero y una posible solución para las tres ramas de $f(r)$ sería:

   1) $\sqrt[3]{|r|}\ e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,
   2) $\sqrt[3]{|r|}\ e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$,
   3) $\sqrt[3]{|r|}\ e^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$.

b) La imagen sería la región contenida entre los argumentos $\frac{19\pi}{36}$ y $\frac{43\pi}{36}$ radianes, sin incluir las líneas que delimitan dicha región.

Regiones

R-Ejercicio 38

[**Enunciado:** página 17]

El conjunto es abierto y conexo. Por tanto, se trata de una región dominio.

R-Ejercicio 39

[**Enunciado:** página 17]

Es un conjunto cerrado.

R-Ejercicio 40

[**Enunciado:** página 17]
Es un conjunto abierto y conexo, así que es una región dominio.

R-Ejercicio 41

[**Enunciado:** página 17]
Conjunto conexo y cerrado.

Función exponencial

R-Ejercicio 42

[**Enunciado:** página 18]
Este ejercicio es una demostración en sí mismo. Ver el vídeo de resolución. No obstante, parte de un posible camino estaría relacionado con los pasos siguientes.

$$e^{2\pm 3\pi \mathrm{i}} = e^2 e^{\pm 3\pi \mathrm{i}} = e^2(-1) = -e^2.$$

R-Ejercicio 43

[**Enunciado:** página 18]
Ver el vídeo de resolución. Parte de un posible camino estaría relacionado con los pasos siguientes.

$$e^{\frac{2+\pi \mathrm{i}}{4}} = e^{\frac{2}{4}}\; e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{e}\; (\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{e}{2}}\; (1+i).$$

R-Ejercicio 44

[**Enunciado:** página 18]
Ver el vídeo de resolución. La clave está en llegar a lo siguiente:

$$\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2},$$

$$e^{x^2-y^2} \leq e^{x^2+y^2}.$$

R-Ejercicio 45

[**Enunciado:** página 18]

Ver el vídeo de resolución. Lo esencial nace de trabajar con la desigualdad triangular:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

R-Ejercicio 46

[**Enunciado:** página 19]

Los números z que buscamos pertenecerían al siguiente conjunto:

$$\left\{ z = x + \mathrm{i}y \;\middle|\; x = \ln\sqrt{2},\ y = \frac{\pi}{4} + n2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

R-Ejercicio 47

[**Enunciado:** página 19]

Los números z que buscamos pertenecerían al siguiente conjunto:

$$\left\{ z = x + \mathrm{i}y \;\middle|\; \frac{\ln 4}{2} < x < \frac{\ln 5}{2},\ \frac{-3\pi}{4} + n\pi \leq y \leq \frac{-\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

R-Ejercicio 48

[**Enunciado:** página 19]

El conjunto B está formado por unos números z que cumplirían con que su parte imaginaria al cuadrado es mayor que la real al cuadrado.

$$B : \left\{ z = x + \mathrm{i}y \mid y^2 > x^2 \right\}$$

Logaritmos complejos

R-Ejercicio 49

[**Enunciado:** página 20]

a) $f(0)$ **no** está definida.

b) $g(0)$ **no** está definida.

c) $h(0)$ **no** está definida.

d) $f(1) = 0$.

e) $g(1) = \mathrm{i}n2\pi$.

f) $h(1) = 0$.

g) $f(-1) = \mathrm{i}\pi$.

h) $g(-1) = \mathrm{i}(\pi + n2\pi)$.

i) $h(-1)$ **no** está definida.

R-Ejercicio 50

[**Enunciado:** página 20]
Esa regla se cumple para los números z que pertenecen al siguiente conjunto:

$$\left\{ z = |z|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)} \;\middle|\; |z| \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Arg}(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

R-Ejercicio 51

[**Enunciado:** página 21]
La expresión se cumple para los números z que pertenecen al siguiente conjunto:

$$\left\{ z = |z|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)} \;\middle|\; |z| \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Arg}(z) \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

R-Ejercicio 52

[**Enunciado:** página 21]

a) $\mathrm{Log}\;\; h(\mathrm{i}) = 0 + \mathrm{i}\frac{5\pi}{8}$.

b) $\mathrm{Log}\;\; h(z)$ sería una región que ocuparía todo el eje real y que, a lo largo del eje imaginario, se extendería entre los $\frac{\pi}{4}$ y los $\frac{3\pi}{4}$ radianes, sin incluir esas delimitaciones.

R-Ejercicio 53

[**Enunciado:** página 21]
El mapeo en este caso es algo complejo para describirlo con palabras. Acudir al vídeo de resolución del ejercicio.

R-Ejercicio 54

[**Enunciado:** página 21]
La región a mapear sería el conjunto siguiente:

$$g(f(\mathbb{C})) = \mathrm{Log}(f(\mathbb{C})) : \left\{ z = x + \mathrm{i}y \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}\right) \right\}.$$

R-Ejercicio 55

[**Enunciado:** página 22]

$\lim_{z\to -3}\ g(z)$ **no** existe.

$\lim_{z\to -3}\ f(z) = \sqrt[3]{3}\ e^{\mathrm{i}\pi}$.

$\lim_{z\to \mathrm{i}}\ g(z) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.

$\lim_{z\to \mathrm{i}}\ f(z)$ **no** existe.

R-Ejercicio 56

[**Enunciado:** página 22]

a)
$$\frac{13\pi}{4} < \arg(z) < \frac{21\pi}{4}.$$

b) Video de resolución del ejercicio.

c)
$$n = 2\ si\ \ -\frac{3\pi}{4} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \pi.$$
$$n = 3\ si\ \ -\pi < \mathrm{Arg}(z) < -\frac{3\pi}{4}.$$

d) $\log(1) = \mathrm{i}n2\pi.$

$g(1) = \mathrm{i}4\pi.$

e)
$$\lim_{z\to -3} g(z) = \ln|-3| + \mathrm{i}5\pi.$$
$$\lim_{z\to -1-\mathrm{i}} g(z) = \ln|-1-\mathrm{i}| + \mathrm{i}\frac{13\pi}{4}.$$

Transformaciones de Möbius

R-Ejercicio 57

[**Enunciado:** página 23]

$f(A)$ sería una circunferencia centrada en el punto $(1, 0)$ de radio 1,

$$1 = |z - 1|.$$

R-Ejercicio 58

[**Enunciado:** página 23]

$f(A)$ sería una recta de pendiente "1" que pasaría por el origen. Una posible forma de escribir la solución sería:

$$f(A) = d + \mathrm{i}d.$$

R-Ejercicio 59

[**Enunciado:** página 23]

$h(A)$ es una región complicada de describir con palabras. Ver el vídeo de resolución del ejercicio.

R-Ejercicio 60

[**Enunciado:** página 24]

Una posible forma de dar la solución sería decir que los números $z \in \mathbb{C}$ que pertenecen a nuestro conjunto cumplen que:

$$|z - \mathrm{i}| > \frac{3}{2},$$

$$\mathrm{Arg}(z - \mathrm{i}) = \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

R-Ejercicio 61

[**Enunciado:** página 24]

El ejercicio 61 es rehacer el ejercicio 60 pero desde otro punto de vista. La respuesta es la misma.

R-Ejercicio 62

[**Enunciado:** página 24]

$$\mathscr{D} = \mathbb{C} - \left\{ z = x + \mathrm{i}y \;\middle|\; |z - 2\mathrm{i}|,\; x \geq 0 \right\}.$$

R-Ejercicio 63

[**Enunciado:** página 25]

Este ejercicio es una demostración tras otra. Ver el vídeo de explicación del ejercicio.

Derivabilidad de funciones usando la definición de límite

R-Ejercicio 64

[**Enunciado:** página 26]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución.

Sí es derivable, pero no basta con éso. Hay que decir dónde lo es. En este caso, $f(z)$ es derivable para todo número z en el plano complejo y $f'(z) = 0$.

R-Ejercicio 65

[**Enunciado:** página 26]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución.

Es derivable para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f'(z) = 1$.

R-Ejercicio 66

[**Enunciado:** página 26]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución.

Es derivable para todo $z \in \mathbb{C}$ y $f'(z) = 2z$.

R-Ejercicio 67

[**Enunciado:** página 26]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución.

No es derivable. Decir ésto implica que no es derivable para ningún $z \in \mathbb{C}$.

R-Ejercicio 68

[**Enunciado:** página 27]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución.

No es derivable.

R-Ejercicio 69

[**Enunciado:** página 27]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución.

Es derivable para $z = 0$. Ahí, el valor de la derivada es cero. Es decir, $f'(0) = 0$.

Derivabilidad de funciones SIN usar la definición de límite

R-Ejercicio 70

[**Enunciado:** página 28]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución. La respuesta es la misma que la dada en el ejercicio 67.

R-Ejercicio 71

[**Enunciado:** página 28]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución. La respuesta es la misma que la dada en el ejercicio 69.

R-Ejercicio 72

[**Enunciado:** página 28]

El ejercicio es una demostración. Ver el vídeo de resolución. La respuesta es la misma que la dada en el ejercicio 68.

Analiticidad, derivabilidad y holomorfía de funciones. Funciones armónicas y armónicas conjugadas

R-Ejercicio 73

[**Enunciado:** página 29]

Una respuesta posible sería:

$$\begin{cases} r\ U_r = V_\theta, \\ r\ V_r = -U_\theta. \end{cases}$$

R-Ejercicio 74

[**Enunciado:** página 29]

No presenta funciones armónicas conjugadas ya que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 + 2 \neq 0.$$

Pero sí es derivable en el punto (0,0).

R-Ejercicio 75

[**Enunciado:** página 29]

Este ejercicio es una demostración en sí mismo. Ver el vídeo de resolucion del ejercicio.

La función $f(z)$ sí es holomorfa y sí presenta funciones armónicas conjugadas.

R-Ejercicio 76

[**Enunciado:** página 30]

Una posible manera de dar la respuesta sería:

$$A = -\frac{B}{3} \ y \ C = \frac{2}{5}.$$

R-Ejercicio 77

[**Enunciado:** página 30]

Este ejercicio es una demostración en sí mismo. Ver el vídeo de resolucion del ejercicio.

R-Ejercicio 78

[**Enunciado:** página 30]

$$f(z) = 2x - x^3 + 3xy^2 + \mathrm{i}\left(-3x^2y + 2y + y^3\right).$$

R-Ejercicio 79

[**Enunciado:** página 30]

Todas las posibles funciones holomorfas en el plano complejo con parte real constante son las que tienen su parte imaginaria también constante.

R-Ejercicio 80

[**Enunciado:** página 31]

Acudir al vídeo de resolución para ver la demostración:

$$f(z) = -3xy^2 + 2y + x^3 + \mathrm{i}\left(3x^2y - 2x - y^3\right).$$